Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2023/2024).
Faculté des Sciences M et MI, durée 1h:30'

Rattrapage Analyse 1

Question de cours (5 points)

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$.**(2 points).**
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.**(3 points).**

Exercice (15 points)

Les questions suivantes sont complètement indépendantes.

1. Soit l'ensemble $E = \left\{ \dfrac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   (a) Montrer que E est borné. **(2 points).**
   (b) Déterminer $\sup E$, $\inf E$ et $\max E$, $\min E$ s'ils existent. **(4 points).**
2. Sachant que :
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \qquad \arg(z_1) = \arg(z_2) \Leftrightarrow \quad \exists \lambda > 0 / z_1 = \lambda z_2,$$
   trouver tous les nombres complexes z tels que :
$$\begin{cases} |z| = |z-2| \\ \arg(z) = \arg(z+3+i) \end{cases}, (\mathbf{3\ points}).$$
3. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par son terme général: $U_n = \dfrac{\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2}{n}$, est convergente et préciser sa limite. **(3 points).**
4. Montrer que toute fonction continue d'un intervalle fermé borné dans lui-même admet au moins un point fixe.**(3 points).**

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. 1^{st} grade LMD (2023/2024)

Faculty of Sciences **M and MI** , **duration:** 1h:30'

Catch up exam Calculus 1

Theoretical question (5 points)

1. Using the definition of the limit, show that : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$**(2 points).**
2. Show that $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ doesn't exist.**(3 points).**

Exercise (15 points)

The following questions are completely independent.

1. Let be $E=\left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
   (a) Show that E is bounded. **(2 points).**
   (b) Find $\sup E$, $\inf E$ and $\max E$, $\min E$ if they exist. **(4 points).**
2. Knowing that:
$$\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}^*, \qquad \arg(z_1)=\arg(z_2)\Leftrightarrow \quad \exists\lambda>0/z_1=\lambda z_2,$$
   find all complex numbers z such that :
$$\begin{cases} |z|=|z-2| \\ \arg(z)=\arg(z+3+i) \end{cases}, (\textbf{3 points}).$$
3. Show that the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ defined by its general term: $U_n=\dfrac{\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2}{n}$, is convergent and precise its limit. **(3 points).**
4. Show that any continuous function of a closed bounded interval in itself admits at least one fixed point.**(3 points).**

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

Correction du rattrapage Analyse 1

Question de cours (5 points)

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

   On a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists B>0/\ \forall x\in V_{-\infty},\ x<(-B)\Rightarrow|f(x)-0|<\varepsilon\quad(\mathbf{1\ point})$$

   Soit $\varepsilon>0$, On a :

$$|f(x)-0|=\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}<\varepsilon\Rightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon^2}+1$$

$$\Rightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\text{ ou bien }\ x<-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}.(\mathbf{0.5\ point})$$

   et puisque $x\in V_{-\infty}$, alors $x<-\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon^2}+1}$, il suffit de prendre $B=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon^2}+1}$.(**0.5 point**)

   Donc,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists B=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}>0/\ \forall x\in V_{-\infty},\ x<(-B)\Rightarrow|f(x)-0|<\varepsilon$$

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Rappelons le théorème de **la limite séquentielle** :
Soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie sur un voisinage $V_a\backslash\{a\}$ épointé de a. Soit $l\in\overline{\mathbb{R}}$. On a :

$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\begin{cases}\text{pour toute suite }(x_n)_n\ \ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_n\in V_a\backslash\{a\},\\ \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=l\end{cases}$$

Posons $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $a=0$.

Méthode 1 : On considère les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par leurs termes généraux :

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\\ y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\end{cases}\quad(\mathbf{1point})$$

On a :$\begin{cases}\lim x_n=0\\ \lim y_n=0\end{cases}$ (**1 point**) et $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)}=\cos(2n\pi)=1\\ \cos\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\right)}=\cos(2n\pi+\pi)=-1\end{cases}$.

Ce qui fait que $\begin{cases} \lim \cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = 1 \\ \lim \cos\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = -1 \end{cases}$ (**1 point**).

Nous avons donc deux suites bien définies sur un voisinage épointé de 0, qui tendent toutes les deux vers 0, pourtant $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$. Ceci veut dire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Méthode 2 : On considère la suite $(z_n)_n$ définie par : $z_n = \dfrac{1}{n\pi}$.(**1 point**)

On a :$\lim z_n = 0$ (**0.5 point**) et $\cos\left(\dfrac{1}{z_n}\right) = \cos\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ (**0.5 point**).

Ce qui fait que $\lim \cos\left(\dfrac{1}{z_n}\right)$ n'existe pas.(**1 point**).

Nous avons donc une suite bien définie au voisinage de 0 privé de 0, qui tend vers 0, pourtant $\lim f(z_n)$ n'existe pas.

Ceci veut dire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Remarque L'étudiant peut proposer d'autres contre exemples. Ils seront comptés juste dès qu'ils mènent à Rome !!!

Exercice (15 points)

1. Soit l'ensemble $E = \left\{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

   (a) Montrer que E est borné.

   On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n^2-1}{n^2+1} = 1 - \dfrac{2}{n^2+1}$

$$\begin{aligned} 1 &\leq n < +\infty \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{2}{n^2+1} < 1.(\textbf{1 points}). \end{aligned}$$

   Donc, $\exists \alpha = 0, \beta = 1 / \forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq \dfrac{n^2-1}{n^2+1} < \beta \Rightarrow E$ est borné.**(1 point).**

   (b) Déterminer $\sup E$, $\inf E$ et $\max E$, $\min E$ s'ils existent.

   Puisque $n = 1 \Rightarrow \dfrac{n^2-1}{n^2+1} = 0$ alors $0 \in E$.

   0 étant un minorant de E, ceci veut dire que $\min E = 0$ **(0.5 point)** et donc $\inf E = 0$.**(0.5 point).**

   Montrons maintenant que $\sup E = 1$, en utilisant la caractérisation du sup :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* / \quad (1-\varepsilon) < 1 - \frac{2}{n^2+1} \leq 1 \quad (\textbf{1point})$$

Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &< 1 - \frac{2}{n^2+1} \\ &\Rightarrow n^2 > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Si $\varepsilon \leq 2$, il suffit de prendre $n = E\left(\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) + 1$. mais si $\varepsilon > 2$, il suffit de prendre $n = 1$ (par exemple !).

Ce qui fait qu'il suffit en fait de prendre $n = \max\left(E\left(\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) + 1, 1\right)$.

Remarque : La réponse $n = E\left(\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) + 1$ est acceptée. (**1point**).

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n = \max\left(E\left(\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) + 1, 1\right) \in \mathbb{N}^* / \quad (1-\varepsilon) < 1 - \frac{2}{n^2+1} \leq 1$$

Ce qui veut dire que $\sup E = 1$.(**0.5 point**). Et puisque $1 \notin E$,alors $\max E$ n'existe pas.(**0.5 point**)
Finalement :

$$\min E = 0, \inf E = 0, \sup E = 1, \max E \ \text{ n'existe pas.}$$

2. Sachant que:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \qquad \arg(z_1) = \arg(z_2) \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda > 0 / z_1 = \lambda z_2,$$

trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |z| = |z-2| \\ \arg(z) = \arg(z+3+i) \end{array} \right.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} |z| & = & |z-2| \\ & \Rightarrow & |z|^2 = |z-2|^2 \\ & \Rightarrow & z\overline{z} = (z-2)\,\overline{(z-2)} \\ & \Rightarrow & z\overline{z} = (z-2)\,(\overline{z}-2) \\ & \Rightarrow & z\overline{z} = z\overline{z} - 2(z+\overline{z}) + 4 \\ & \Rightarrow & z + \overline{z} = 2 \\ & \Rightarrow & 2\,\mathrm{Re}(z) = 2 \\ & \Rightarrow & \mathrm{Re}(z) = 1.(\textbf{1 point}) \end{array}$$

En considérant que $z = x + iy$ on trouve alors que $x = 1$.(**0.5 point**).
Ensuite, on a

$$\begin{array}{rcl} \arg(z) & = & \arg(z+3+i) \Leftrightarrow \ \exists \lambda > 0 \ / \ z = \lambda\,(z+3+i) \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda > 0 \ / \ 1 + iy = \lambda\,(1 + iy + 3 + i) \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda > 0 \ / \ 1 + iy = \lambda\,(4 + i(y+1)) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda = 1 \\ y = \lambda(y+1) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{3} \end{array} \right. (\textbf{1 point}) \end{array}$$

Finalement : $z = 1 + i\dfrac{1}{3}$.(**0.5 point**)

L'ensemble de tous les nombres complexes z tels que : $\left\{ \begin{array}{l} |z| = |z-2| \\ \arg(z) = \arg(z+3+i) \end{array} \right.$ est $S = \left\{ \left(1 + i\dfrac{1}{3}\right) \right\}$.

3. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son terme général: $U_n = \dfrac{\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2}{n}$ est convergente et préciser sa limite. On a:

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \left(\sqrt{n}-1\right) < E\left(\sqrt{n}\right) \leq \sqrt{n}. \ (\mathbf{1\ point})$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \left(n - 2\sqrt{n}+1\right) < \left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2 \leq n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) < \frac{\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2}{n} \leq 1 \quad (\mathbf{1\ point})$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ et d'après le théorème des trois suites (des gendarmes), on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1 \quad (\mathbf{1\ point})$$

4. Montrer que toute fonction continue d'un intervalle fermé borné dans lui-même admet au moins un point fixe.

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue.
Nous cherchons l'existence de points fixes de f dans $[a,b]$, i.e: des points c dans $[a,b]$ qui vérifient $f(c) = c$.

On considère la fonction $g(x) = f(x) - x$.
C'est une fonction continue sur $[a,b]$ car elle résulte d'une soustraction entre deux fonctions continues sur $[a,b]$.(**0.5 point**).
Puis, on a :

$$\begin{aligned} a &\leq f(a) \leq b \\ &\Rightarrow 0 \leq (f(a)-a) \leq (b-a) \\ &\Rightarrow \ 0 \leq g(a) \leq (b-a). \ (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve $(a-b) \leq g(b) \leq 0$. (**0.5 point**). Ce qui fait que $g(a)g(b) \leq 0$.(**0.5 point**).

- Si $g(a)g(b) < 0$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g sur l'intervalle $[a,b]$, on trouve qu'il existe **au moins** un c dans $]a,b[$ tel que $g(c) = 0$, i.e. $f(c) - c = 0$ et donc $f(c) = c$. c est donc un point fixe de f.(**1point**).
- Si $g(a)g(b) = 0$, alors $g(a) = 0$ ou bien $g(b) = 0$, donc **au moins** l'un d'entre a et b est un point fixe de f.