Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-M et MI

Année Universitaire : 2023/2024
Durée : 01 h 30mn
Le 12/06/2024

Examen de rattrapage de Mécanique

Exercice 1: (06 pts)

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y).

1. Ecrire les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.
2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.
3. Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires.
4. Si $\rho=(t^2+1)$ et $\theta=\omega t$ déduire l'expression de vecteur vitesse en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$.
5. Donner l'expression du vecteur accélération dans ce cas.

Exercice 2: (06 pts)

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Trouver :

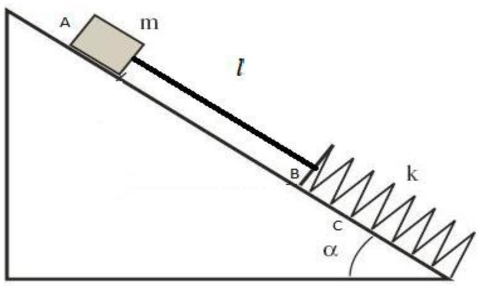
1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes du vecteur vitesse et accélération et leurs modules.
3. La nature du mouvement.
4. Les accélérations tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure.

Exercice 3: (08 pts)

Un bloc de masse m est déposé sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, à une distance l au-dessus d'un ressort léger et non comprimé de raideur k. Le mouvement du bloc est sans frottement.

1. En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique, trouver l'expression de la vitesse du bloc lorsqu'il touche le ressort pour la première fois.

2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'expression de la compression maximale du ressort en fonction de m, g, α et k.

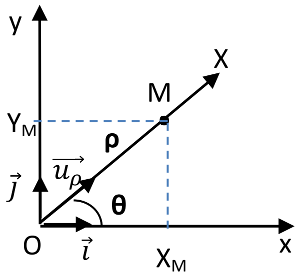


Bon courage

Corrigé d'examen de rattrapage

Exercice 1 : (06 pts)
1) Un point matériel M est identifié par ses coordonnées cartésiennes (x,y) :
Trouver x et y en termes de coordonnées polaires ρ et θ

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \quad (1)$$



Par projection:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases} \quad \textbf{(01 pts)}$$

2) vecteur position en coorddonnées polaires:

$$\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\overrightarrow{u_\rho} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \quad \textbf{(01 pts)}$$

3) L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires est :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{U}_\theta.\frac{d\theta}{dt} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

d'où $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$

$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta$ **(0.5 pts)**

4) Si ρ=(t^2+1) et θ=ωt déduire l'expression de vecteur vitesse en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}$ et $\overrightarrow{U_\theta}$.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

$$\vec{v} = 2t.\vec{U}_\rho + (t^2 + 1).\omega.\vec{U}_\theta \quad \textbf{(01 pts)}$$

5) Donner l'expression du vecteur accélération dans ce cas.

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{U}_r + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - \rho(\dot{\theta})^2\vec{U}_r \quad \textbf{(01 pts)}$$

$$\vec{a} = 2\vec{U}_r + 4t.\omega.\vec{U}_\theta - (t^2 + 1)(\omega)^2\vec{U}_r \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

Exercice 2 : (06 pts)

On a $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

1- L'équation de trajectoire :

$$x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}\,\textbf{(0.5 pts)} \Rightarrow y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

Donc

$$\mathbf{y = \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0{}^2}} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

2- La vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = gt \end{cases}$$ (**0.5 pts**) Donc $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{{v_0}^2 + g^2t^2}$ **(0.5 pts)**

et $\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = g \end{cases}$ (**0.5 pts**) Donc $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{g^2} = g$ **(0.5 pts)**

3- Nature du mouvement

$\vec{a}.\vec{v} = g^2t > 0$ donc le mouvement est uniformément varié accéléré **(0.5 pts)**

4- Calcul de a_T , a_N :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{{v_0}^2+g^2t^2}\right)}{dt} = \frac{2g^2t}{2\sqrt{{v_0}^2+g^2t^2}} = \boldsymbol{\frac{g^2t}{v}}$$ **(01 pts)**

$$a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow {a_N}^2 = a^2 - {a_T}^2$$ **(0.5 pts)**

Donc $a_N = \sqrt{g^2 - \frac{g^4t^2}{v^2}} = \sqrt{g^2\left(1 - \frac{g^2t^2}{v^2}\right)} = g\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{{v_0}^2+g^2t^2}} = \frac{gv_0}{v}$ **(0.5 pts)**

d'où $\boldsymbol{a_N = \frac{gv_0}{v}}$

5- $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{gv_0}$ **(0.5 pts)**

<u>Exercice 3: </u>(08 pts)

1. Il n'y a pas de forces non conservatives. On peut donc utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$\Delta E_m = E_{TA} - E_{TB} = 0$ **(0.5 pts)** donc $E_{cA} + E_{ppA} = E_{cB} + E_{ppB}$ **(0.5 pts)**

En prenant l'origine des énergies potentielles dans B, et sachant que la vitesse dans A est égale à 0, nous obtenons: $mgh = (½).m.v_B^2$ **(0.5 pts)**

donc: $_B = \sqrt{2gh}$ **(0.5 pts)** avec $h = l\ sin\alpha$

$$\text{d'où } v_B = \sqrt{2g.l\sin\alpha}$$ **(01 pts)**

2. Étude du système entre les points B et C:

Si l'on choisit l'origine des abscisses à B ($x_B = 0$) et donc $x_C = d$ (distance de compression maximale), on trouve :

$$v_C^2 - v_B^2 = 2ax \quad (*)$$ **(0.5 pts)**

Pour trouver l'expression de l'accélération, nous utilisons le principe fondamental de la dynamique :

$$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$ **(0.5 pts)**

Les forces sont le poids, la réaction R et la force de rappel du ressort. Fe:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_e} = m\vec{a}$$ **(0.5 pts)**

Projection sur l'axe (Ox):

$$mg\ sin\alpha - Fe = mg\ sin\alpha - kx = ma$$ **(0.5 pts)**

Then: $a = g\ sin\alpha - (k/\ m)\ x$ **(01 pts)**

Remplacer par (*), pour trouver:

$$-v_B^2 = 2(\text{g sin}\alpha - \text{(k/ m) x})x \Rightarrow (k/\ m)\ d^2 - 2g\ sin\alpha.d - v_B{}^2 = 0$$ **(0.5 pts)**

$$(\text{k}/2)\ d^2 - (g\ \text{m}\ sin\alpha)\ d - (\text{m g. l sin}\alpha) = 0$$ **(0.5 pts)**

La résolution de cette équation du second degré en d donne deux solutions. L'une est négative ; nous ne retenons que la solution positive (la solution physique) :

$$d = \frac{mgsin\alpha + \sqrt{m^2 g^2 sin^2\alpha + 2kmlsin\alpha}}{k}$$ **(01 pts)**