Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.
Faculté des Sciences

$1^{ère}$ année LMD (2023/2024).
M et MI, durée 1h:30' 23/01/2024

Examen Final de remplacement Analyse1

Exercice 1 (05 points)

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, en justifiant les réponses:

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors $(U_n.V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée alors elle n'est pas de Cauchy.
4. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors $\lim (U_{n+1}-U_n) \neq 0$.

Exercice 2 (06 points)

Soit les deux suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} V_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^n}{k!} \\ W_n = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^n}{k!} \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie des deux suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On pose $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^n}{k!}$. En utilisant ce qui précède, étudier la nature de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 (09 points)

Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-4}{x-4}$

1. Trouver les points fixes de f.
2. Montrer que $D=[0,2]$ est un intervalle stable par f.
3. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur D.
4. Étudier la nature de la suite définie par : $\begin{cases} U_0 \in D \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.
5. En déduire la nature de la suite définie par : $\begin{cases} U_0 > 4 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. 1^{st} grade LMD (2023/2024).
Faculty of Sciences **M and MI**, duration 1h:30$'$ 01/23/2024

Final Exam of replacement Calculus1

Exercise 1 (05 points)

Answer true or false to the following questions, justifying the answers:

1. If $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges then $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges.
2. If $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges then $(U_n.V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges.
3. If $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is not bounded then it is not Cauchy.
4. If $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverges then $\lim\left(U_{n+1}-U_n\right)\neq 0$.

Exercise 2 (06 points)

Let be the two sequences $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ defined by :

$$\begin{cases} V_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^n}{k!} \\ W_n = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^n}{k!} \end{cases}$$

1. Study the monotony of the two sequences $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Put $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ / $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^n}{k!}$. Using the above, investigate the nature of the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercise 3 (09 points)

Let the function defined by : $f(x)=\dfrac{-4}{x-4}$

1. Find the fixed points of f.
2. Show that $D=[0,2]$ is a stable interval by f.
3. Study the sign of $f(x)-x$ on D.
4. Study the nature of the sequence defined by : $\begin{cases} U_0\in D \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.
5. Deduce the nature of the sequence defined by : $\begin{cases} U_0>4 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

Corrigé

Exercice 1 *(5 **points**) Pour toute suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on a*

1. *Vraie.* $\hookleftarrow$ ***0,5***
   Justification : $\hookleftarrow$ ***0,5***
   Supposons que $(u_n)_n$ converge et $(v_n)_n$ diverge, montrons que $(u_n+v_n)_n$ diverge.
   Par l'absurde supposons que $(u_n+v_n)_n$ converge.

$$\begin{aligned}(u_n+v_n)_n \text{ converge} &\Longrightarrow (u_n+v_n-u_n)_n \text{ converge car somme de deux suites convergentes.}\\ &\Longrightarrow (v_n)_n \text{ converge}\end{aligned}$$

   Ce qui est absurde, donc $(u_n+v_n)_n$ diverge.

2. *Fausse ;* $\hookleftarrow$ ***0,5***
   contre exemple : $\hookleftarrow$ 1 pt
   $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *converge et $((-1)^n)_n$ diverge et pourtant* $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ *converge.*

3. *Vrai* $\hookleftarrow$ ***0,25***
   La justification $\leftarrow$ 1 pt
   Si $(u_n)_n$ est de Cauchy alors $(u_n)_n$ est convergente
   et si $(u_n)_n$ est convergente alors $(u_n)_n$ est bornée.
   Par conséquent :
   Si $(u_n)_n$ est de Cauchy alors $(u_n)_n$ est bornée.
   La proposition c n'est autre que la contraposée de la proposition suscitée.

4. *Fausse.* $\hookleftarrow$ ***0,5***
   Contre exemple : $\hookleftarrow$ ***0,25*** *La suite de terme général* $u_n=\sum_1^n \frac{1}{k}$ *est divergente pourtant*
   Si $\lim\,(u_{n+1}-u_n)=\lim \frac{1}{n+1}=0$.

Exercice 2 *(6 **points**)*

1. $\hookleftarrow$ $\boxed{\text{1 pt + 1 pt}}$

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n=\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}&=\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}\\&=\frac{-1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+2)!}<0\end{aligned}$$

   donc $(v_n)_n$ est décroissante.

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n=\sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}&=\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!}\\&=\frac{1}{(2n+2)!}+\frac{-1}{(2n+3)!}>0\end{aligned}$$

   donc $(w_n)_n$ est croissante.

2. $\hookleftarrow$ 2 pts

On a $u_{2n} = v_n$ *et* $u_{2n+1} = w_n$

On a $(v_n)_n$ *est* $\downarrow$ *et* $(w_n)_n$ *est* $\uparrow$ *de plus*

$\lim\ (w_n - v_n) = \lim\ \dfrac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = \lim\ \dfrac{(-1)}{(2n+3)!}$

On a $(2n+3)! \geq 2n+3 \implies \dfrac{1}{(2n+3)!} \leq \dfrac{1}{2n+3}$

Or $\lim\ \dfrac{1}{2n+3} = 0$ *donc* $\lim\ \dfrac{(-1)}{(2n+3)!} = 0.$

Par conséquent $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *sont adjacentes*

donc elles sont convergentes vers la même limite l

D'où $(u_n)_n$ *est convergente.*

Exercice 3 (9 ***points***) *Soit* $f(x) = \dfrac{-4}{x-4}$ *et* $Df = \mathbb{R} - \{4\}$

1. $\hookleftarrow$ 1 pt

$$\begin{cases} f(x) = x \\ x \in Df \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = 4x - x^2 \\ x \in Df \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x \in Df \end{cases} \iff x = 2 \in Df.$$

2. $\hookleftarrow$ 1 p

Méthode 1 *: utiliser le tableau de variation de* f.

Méthode 2 *: Supposons que* $x \in [0,2]$*, alors*

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \implies -4 \leq x-4 \leq -2 &\implies \frac{-1}{2} \leq \frac{1}{x-4} \leq \frac{-1}{4} \\ &\implies (-4)\left(\frac{-1}{2}\right) \geq \frac{-4}{x-4} \geq (-4)\left(\frac{-1}{4}\right) \\ &\implies 1 \leq f(x) \leq 2 \\ &\implies f(x) \in [0,2] \end{aligned}$$

3. $\hookleftarrow$ 1 pt

On a

$$f(z) - z = \frac{-4}{z-4} - z = \frac{-4 - z^2 + 4z}{z-4} = \frac{(z-2)^2}{4-z}$$

donc

$$f(z) - z = \frac{(z-2)^2}{4-z} \geq 0 \quad \forall z \in [0,2]$$

4. $\hookleftarrow$ 3 pts

$$\begin{cases} u_0 \in [0,2] \\ u_{n+1} = \dfrac{-4}{u_n - 4} \end{cases}$$

La fonction associée à cette suite récurrente est

$$f(x) = \frac{-4}{x-4} \quad x \in [0,2]\,.$$

Méthode 1

$$\begin{cases} u_0 \in D \\ D \text{ est stable par } f \end{cases} \implies u_n \in D \quad \forall n$$

Étudions alors le sens de variation *de f sur $D=[0,2]$:*
On a

$$f'(x)=\frac{4}{(4-x)^2} \quad \forall x\neq 4$$

x	0	2
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	2

donc f est croissante sur D par conséquent la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

$$\left\{\begin{array}{l}(u_n)_{n\geq 0} \text{ est bornée} \quad \text{car } u_n\in D\\ (u_n)_{n\geq 0} \text{ est monotone}\end{array}\right. \Longrightarrow (u_n)_{n\geq 0} \text{ converge}$$

De plus $\lim u_n=2$ *car c'est le seul point fixe de f.*

Méthode 2

D'après la 1ère question, si $(u_n)_n$ converge alors sa limite l est solution de

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=x\\ x\in[0,2]\end{array}\right.$$

c.a.d

$$l=2$$

De plus , on a $f'(x)=\dfrac{4}{(4-x)^2} \quad \forall x\in Df$
Il suffit alors de comparer u_0 et u_1 où $u_0\in[0,2]$
On a

$$u_1-u_0=f(u_0)-u_0$$

D'après la 3ème question,

$$f(u_0)-u_0\geq 0 \quad \forall x\in[0,2]$$

alors

$$u_1\geq u_0$$

et on déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante majorée car $u_n\in D$ donc convergente.

5. 3 pts

(b) $\hookleftarrow$ *Si $u_0>4$ alors $u_1=f(u_0)<0$ et $u_2=f(u_1)\in[0,2]$ et la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente vers $l=2$.*

Remarque

On peut utiliser le tableau de variation de f, ci dessous, pour répondre à la *question* .

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$ 0