Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.
Faculté des Sciences

$1^{ère}$ année LMD (2023/2024).
M et MI, durée 1h:30$'$, le 17/01/2024.

Examen Final Analyse1

Question de cours (5 points)

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est **uniformément continue** sur $]0, 1]$,**(2points)**, mais qu'elle **n'est pas uniformément continue** sur $\mathbb{R}$.**(3 points).**

Exercice 1 (07 points) Les racines énièmes de l'unité

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: (1)... $Z^n = 1.\,(n \in \mathbb{N}^*)$.**(2 points).**
2. En déduire alors les solutions de l'équation: (2)... $Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1 = 0$.**(2 points).**
3. On pose $n = 3$. Représenter les trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de l'équation $Z^3 = 1$ sur le cercle trigonométrique.**(1 point).**

   Que pouvez-vous remarquer ? **(0.5 point).**
4. Trouver $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$.**(1.5 points).**

Exercice 2 (08 points) La suite de Fibonacci

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = 0, U_1 = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.**(2 points)**.
2. Vérifier qu'on peut mettre $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $W_{n+1} = f(W_n)$.**(1 point)**.
3. Montrer que $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puis trouver sa limite.**(5 points)**.

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. 1^{st} grade LMD (2023/2024).
Faculty of Sciences **M and MI**, duration 1h:30$'$, 01/17/2024.

Final Exam Calculus1

Theoritical Question (5 points)

Show that the function f defined by $f(x) = x^2$ is **uniformly continuous** on $]0,1]$, **(2 points),** but **not uniformly continuous** on $\mathbb{R}$.**(3 points).**

Exercise 1 (07 points) The nth roots of unity

1. Solve in $\mathbb{C}$ the equation: (1)... $Z^n = 1. \, (n \in \mathbb{N}^*)$.**(2 points).**
2. Deduce then the solutions of the equation: (2)... $Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1 = 0$.**(2 points).**
3. Put $n = 3$. Represent the three solutions Z_1, Z_2 and Z_3 of the equation $Z^3 = 1$ on the trigonometric cercle, **(1 point)**. What can you notice? **(0.5 points).**
4. Find $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$.**(1.5 points).**

Exercise 2 (08 points) The Fibonacci sequence
Let be the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \\ U_0 = 0, U_1 = 1. \end{cases}$$

1. Show that :$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.**(2 points)**.
2. Verify that we may put $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ in the form $W_{n+1} = f(W_n)$.**(1 point).**
3. Show that $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converges, then find its limit.**(5 points).**

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année LMD (2023/2024).
Faculté des Sciences **M et MI**, durée 1h:30$'$, le 17/01/2024.

Correction de l'examen final Analyse1

Question de cours (5 points)

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x)=x^2$ est **uniformément continue** sur $]0,1]$:

Méthode 1 : f est **uniformément continue** sur $]0,1] \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall x_1,x_2\in]0,1],\ \ |x_1-x_2|<\alpha \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon....(*)(\textbf{1 point})$$

Soit $\varepsilon>0$,
On a

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= \left|{x^2}_1-{x^2}_2\right| \\ &= |x_1-x_2|\,|x_1+x_2| \\ &\leq 2\,|x_1-x_2|\,,\ \text{car } 0<x_1\leq 1 \text{ et } 0<x_2\leq 1(\textbf{0.5 point})\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$ (**0.5 point**)pour avoir $|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|{x^2}_1-{x^2}_2|<\varepsilon$.
Finalement,

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha=\frac{\varepsilon}{2}>0/\ \forall x_1,x_2\in]0,1],\ \ |x_1-x_2|<\alpha \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Méthode 2: f est **k**-Lipschitizienne sur $]0,1] \Rightarrow f$ est **uniformément continue** sur $]0,1]$.
On commence par montrer que :

$$\forall x_1,x_2\in]0,1],\ \ |f(x_1)-f(x_2)|\leq 2\,|x_1-x_2|\,(\textbf{1 point})$$

exactement comme dans la méthode 1.
Alors, f est **2**-Lipschitizienne sur $]0,1]$, ce qui veut dire qu'elle est uniformément continue sur $]0,1]$.(**1 point**)

2. On montre maintenant que f **n'est pas uniformément continue** sur $\mathbb{R}$.
C'est-à-dire qu'on veut montrer maintenant la négation de $(*)$ sur $\mathbb{R}$:

$$\exists \varepsilon>0\ /\ \forall \alpha>0,\ \exists x_1,x_2\in\mathbb{R},\ \ (|x_1-x_2|<\alpha)\wedge(|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon)\,.(\textbf{1 point})$$

On montre d'abord que :

$$\forall \alpha>0,\ \exists n\in\mathbb{N}^*/\frac{1}{n}<\alpha$$

Le n demandé existe toujours car $\mathbb{R}$ est archimédien, il suffit de prendre $n_\alpha=E\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1$.(**0.5 point**) Il dépend de α.

On définit maintenant deux nombres qui dépendent de n_α , (c'est-à-dire qu'ils dépendent indirectement de α).

$$\begin{cases} x_{1,\alpha}=n_\alpha+\frac{1}{n_\alpha}\,(\in\mathbb{R}) \\ x_{2,\alpha}=n_\alpha\,(\in\mathbb{R})\end{cases}\ .(\textbf{0.5 point})$$

On a $|x_{1,\alpha}-x_{2,\alpha}|=\left|n_\alpha+\frac{1}{n_\alpha}-n_\alpha\right|=\frac{1}{n_\alpha}<\alpha$.(**0.5 point**)

Et en même temps, on a $|f(x_{1,\alpha}) - f(x_{2,\alpha})| = \left| \left(n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha}\right)^2 - (n_\alpha)^2 \right| = \frac{1}{n^2{}_\alpha} + 2 > 2$.(**0.5 point**)
Finalement :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon &= 2 > 0 \ / \ \forall \alpha > 0, \ \exists \left(x_{1,\alpha} = n_\alpha + \frac{1}{n_\alpha}, \text{ et } x_{2,\alpha} = n_\alpha\right) \in \mathbb{R}^2, \ (\text{avec } n_\alpha = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1) \\ & \text{tels que} \quad (|x_1 - x_2| < \alpha) \wedge (|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon) . \end{aligned}$$

Exercice 1 (07 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1)...$Z^n = 1. \, (n \in \mathbb{N}^*)$.

   On écrit $Z = |Z| \, e^{i\theta}$ et $1 = (1)e^{i0}$, on trouve alors que :

$$\begin{aligned} Z^n &= 1 \Leftrightarrow |Z|^n \, e^{i\theta n} = (1)e^{i0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^n = 1 \\ e^{i\theta n} = e^{i0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 1 \\ \theta n = 0 + 2k\pi, \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \end{cases} \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) contient exactement n solutions. Il est donné par :

$$\begin{aligned} S_n &= \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1 \right\} \\ &= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, ..., e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

2. En déduire alors les solutions de l'équation (2)...$Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1 = 0$.

   Il suffit d'écrire : $Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1 = \dfrac{Z^n - 1}{Z - 1}$ pour $Z \neq 1$.

   On trouve alors :

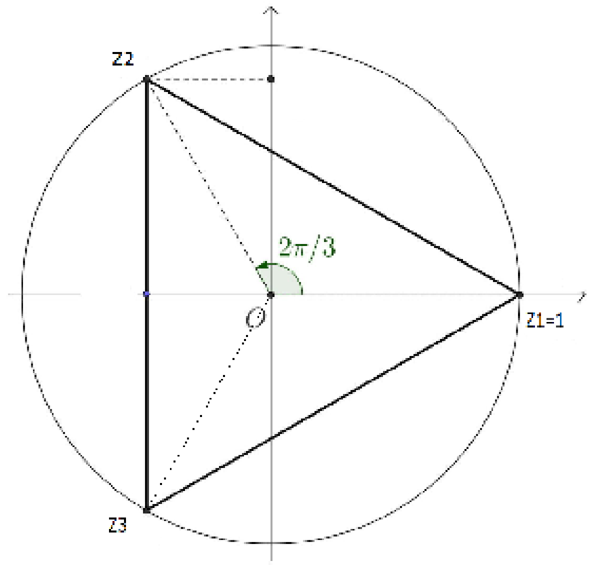
$$\begin{aligned} Z^{n-1} + Z^{n-2} + ...Z + 1 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{Z^n - 1}{Z - 1} = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z^n - 1 = 0 \\ Z \neq 1 \end{cases} \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donné par :

$$\begin{aligned} S'_n &= S_n \diagdown \{1\}. \\ &= \left\{ e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, ..., e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

3. Représenter les trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de l'équation $Z^3 = 1$ sur le cercle trigonométrique.

   Là, $n = 3$ donc $S_3 = \left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{3}}, e^{\frac{4\pi}{3}} \right\}$.



(**1 point**)

Que pouvez-vous remarquer ?

Nous pouvons voir que le triangle résultant est un triangle équilatéral.(**0.5 point**)

Ou alors, d'une manière générale, les racines énièmes de l'unité forment les sommets d'un plygône régulier.

4. Trouver $M = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

$$\begin{aligned} M &= 1 + e^{\frac{2\pi}{3}} + e^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= 1 + e^{\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{\frac{2\pi}{3}}\right)^2 (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

M est la somme de trois termes d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison égale à $e^{\frac{2\pi}{3}}$. Donc :

$$\begin{aligned} M &= (1)\,.\frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\ &= \frac{1 - e^{2\pi}}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\ &= \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi}{3}}} \\ &= 0.(\mathbf{1\ point}) \end{aligned}$$

Et d'une manière générale, dès que $n \geq 2$, la somme des racines énième de l'unité est égale à 0.

Exercice 2 (08 points) La suite de Fibonacci

1. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Première méthode : par récurrence

(a) Vérification : $n = 0$,(**0.5 point**)
On a $U_2 = 1$. Donc $U_2U_0 - U_1^2 = -1 = (-1)^{0+1}$.

(b) H.R : $U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ (**0.25 point**)

(c) Preuve: On veut montrer que : $U_{n+3}U_{n+1} - U_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}$

$$\begin{aligned} U_{n+3}U_{n+1} - U_{n+2}^2 &= (U_{n+2} + U_{n+1})\,U_{n+1} - U_{n+2}\,(U_{n+1} + U_n)\ (\mathbf{0.5\ point}) \\ &= U_{n+1}^2 - U_{n+2}U_n \\ &= -\left[U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2\right] \\ &= -(-1)^{n+1} \quad \text{d'après l'H.R} \\ &= (-1)^{n+2} \quad \text{CQFD } (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

(d) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.(**0.25 point**)

Deuxième méthode : par les suites géométriques

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2$, On obtient alors :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 \\ &= (U_{n+1} + U_n)\,U_n - (U_{n-1} + U_n)\,U_{n+1} \\ &= U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1} \\ &= -V_n (\mathbf{1\ point}) \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} = -V_n$.

Ce qui veut dire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $V_1 = -1$ et de raison $q = -1$.(**0.5 point**)

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = (-1)^{n-1} V_1 = (-1)^n$ CQFD.(**0.5 point**)

2. Vérifier qu'on peut mettre $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $W_{n+1} = f(W_n)$.

   On peut montrer facilement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$.

   On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$. On voit bien aussi que $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n > 0$.

   On a alors : $W_{n+1} = \dfrac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \dfrac{U_{n+1} + U_n}{U_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)} = 1 + \dfrac{1}{W_n}$.

   Donc $W_{n+1} = f(W_n)$ où : $f(W_n) = 1 + \dfrac{1}{W_n}$ et $W_1 = \dfrac{U_2}{U_1} = 1$.(**1 point**)

3. Montrer que $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puis trouver sa limite.

   On considère la suite $(W_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : W_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{W_n} \\ W_1 = 1. \end{cases}$$

   Ainsi que sa fonction associée : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur le domaine $D = [1, +\infty[$.(**0.5 point**)

- f est continue sur D.(**0.25 point**)
- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$(**0.25 point**)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert +\infty$		
	$\Vert$	$\searrow$	
	$\Vert$		1

(**0.25 point**)

- $f(D) =]1, +\infty[\subset D$.(**0.25 point**)
- f est décroissante, donc $(W_n)_n$ n'est pas monotone, par contre $(W_{2n})_n$ et $(W_{2n+1})_n$ sont monotones de signes de variations contraires.(**1 point**)
- Cherchons les points fixes de $(f \circ f)$:

$(f \circ f)(x) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Puis $(f \circ f)(x) - x = \dfrac{2x+1}{x+1} - x = \dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, donc, $(f \circ f)(x) - x = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ (**accepté**) et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ (**refusé**).(**1 point**)
Donc $(f \circ f)$ admet un seul point fixe dans D qui est le point : $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, (**le nombre d'or**).

- f est décroissante donc $(f \circ f)$ est croissante et c'est la fonction associée aux sous suites $(W_{2n})_n$ et $(W_{2n+1})_n$.(**0.25 point**)
- Puisque $W_1 = 1$ et $W_3 = \dfrac{3}{2}$ alors $(W_{2n+1})_n$ est croissante et donc $(W_{2n})_n$ est décroissante.(**0.25 point**)
- $W_1 = 1 \leq \Phi$ alors , $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n+1} \leq \Phi$ car Φ est un point fixe de $(f \circ f)$, ce qui fait que $(W_{2n+1})_n$ est croissante et majorée, elle converge donc vers Φ, l'unique point fixe de $(f \circ f)$ dans D. i.e. $(W_{2n+1})_n \to \Phi$.(**0.25 point**)
- $(W_{2n})_n$ est décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers Φ, l'unique point fixe de $(f \circ f)$ dans D.(**0.25 point**)

Conclusion:
$(W_{2n})_n \to \Phi$ et $(W_{2n+1})_n \to \Phi$ donc $(W_n)_n \to \Phi$.(**0.5 point**)