Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen — S1 LMD **M et MI** (2023/2024)

Faculté des Sciences — 1 heure

Contrôle Continu de remplacement - Analyse 1-

Exercice 1 (7 points)

1. Donner la définition de la partie entière d'un réel x, $E(x)$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tels que $(x+y) \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$E(x)+E(y)=x+y-1$$

3. Soit $E=\left\{1+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
   (a) Montrer que E est borné.
   (b) Trouver $\sup E$ et $\inf E$ en justifiant vos réponses.

Exercice 2 (8 points)

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   En déduire que la suite $\left(V_n\right)_n / V_n=\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ diverge vers $(+\infty)$.

2. Soit la suite récurrente définie par:

$$\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}=1-U_n^2 \end{cases}$$

On pose $f(x)=1-x^2$ définie sur $D=[0,1]$.
a. Vérifier que $(f(x)-x)$ divise $(f\ (f(x))-x)$.
b. Étudier la nature de la suite $\left(U_n\right)_n$.

Le téléphone portable est strictement interdit. Bon courage.

Abou Bekr Belkaid University of Tlemcen. 1st grade LMD **M and MI** (2023/2024)

Faculty of Sciences 1 hour

Continuous Control of Replacement - Calculus 1-

Exercice 1 (7 points)

1. Give the definition of the integer part of a real number x, $E(x)$.
2. Let be $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ such that $(x+y) \in \mathbb{Z}$. Show that :

$$E(x) + E(y) = x + y - 1$$

3. Let be $E = \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
   (a) Show that E is bounded.
   (b) find $\sup E$ and $\inf E$ justifying your answers.

Exercice 2 $\boxed{\text{(8 points)}}$

1. Show that : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   Deduce then that the sequence $(V_n)_n \,/ V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, (n \in \mathbb{N}^*)$ diverges to $(+\infty)$.

2. Let be the recurring sequence defined by:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 1 - U_n^2 \end{cases}$$

Set $f(x) = 1 - x^2$ defined on $D = [0, 1]$.

a. Verify that $(f(x) - x)$ divide $(f\ (f(x)) - x)$.
b. Study the nature of the sequence $(U_n)_n$.

Cell phones are strictly prohibited. Good luck.

Correction du CC de remplacement
Analyse 1

Exercice 1 (7 points)

1. $E(x)$ est l'élément de $\mathbb{Z}$, qui vérifie : $E(x) \leq x < E(x)+1.$ $\boxed{1}$

2. $\boxed{\text{Total question: } \mathbf{2} \text{ points}}$ Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ tels que $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z}$.
On a
$$E(x) \leq x < E(x)+1 \text{ et } E(y) \leq y < E(y)+1$$
Comme
$$x \notin \mathbb{Z} \text{ alors } E(x) < x \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}}$$
de même
$$y \notin \mathbb{Z} \text{ alors } E(y) < y \quad \boxed{\mathbf{0{,}25}}$$
donc
$$\begin{cases} E(x) < x < E(x)+1 \\ E(y) < y < E(y)+1 \end{cases} \Rightarrow E(x)+E(y) < x+y < E(x)+E(y)+2$$
$$\begin{cases} x+y \in \mathbb{Z} \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}} \\ E(x)+E(y) < x+y < E(x)+E(y)+2 \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}} \end{cases}$$
$\Rightarrow x+y = E(x)+E(y)+1$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$.

3. Soit $E = \left\{1+\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

   (a) $\boxed{1 \text{ points}}$
   On a $\left|1+\dfrac{1}{n}\right| \leq 1+\dfrac{1}{|n|}$
   $$n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |n| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|n|} \leq 1 \Rightarrow 1+\frac{1}{|n|} \leq 2 \Rightarrow \left|1+\frac{1}{n}\right| \leq 2$$
   Conclusion E est bornée.

   (b) Total question $\boxed{\mathbf{3} \text{ points}}$
   $$\begin{cases} 2 \text{ majore } E \quad \boxed{\mathbf{0{,}25}} \\ 2 \in E \quad \boxed{\mathbf{0{,}25}} \end{cases} \Rightarrow 2 = \max E \Rightarrow 2 = \sup E \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}}$$
   $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}^{-*} \quad n \leq -1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \geq -1 \Rightarrow 1+\dfrac{1}{n} \geq 0 \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1+\dfrac{1}{n} > 0 \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}} \end{cases} \Rightarrow 0 \text{ minore}$$
   E
   $$\begin{cases} 0 \text{ minore } E \\ 0 = 1+\dfrac{1}{-1} \in E \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}} \end{cases} \Rightarrow 0 = \min E \Rightarrow 0 = \inf E \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}}$$

Exercice 2 (8points)

1. $\boxed{\textbf{0,5} \text{ points}}$

$$\begin{aligned}
2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{k+1}+\sqrt{k} \geq 2\sqrt{k} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{k+1} \geq \sqrt{k} \quad \text{ce qui est vrai}
\end{aligned}$$

La déduction:

Total question $\boxed{\textbf{1,5} \text{ points}}$
On a

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \sqrt{n+1}-1 \quad \boxed{\textbf{0,5}}
\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}\right) = \sum_{k=2}^{n+1}\left(\sqrt{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}\right)+\left(\sqrt{n+1}-1\right) \\
&= \left(\sqrt{n+1}-1\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$w_n \geq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

Or

$$\lim 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = +\infty \quad \boxed{\textbf{0,5}} \Rightarrow \lim w_n = +\infty. \quad \boxed{\textbf{0,5}}$$

2. On pose $P(x) = 1 - x^2$ et $D = [0,1]$.

(a) $\boxed{\textbf{0,5} \text{ points}}$ **<u>Méthode 1</u>**:

$$\begin{aligned} \forall x \quad x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \quad & \Rightarrow \quad -1 \le -x^2 \le 0 \\ & \Rightarrow \quad 0 \le 1 - x^2 \le 1 \end{aligned}$$

donc $P(D) \subset D$.

<u>Méthode 2</u>: Le tableau de variation de f.

(b) $\boxed{\textbf{0,5} \text{ points}}$ Résoudre l'équation $P(x) = x$ dans D.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} P(x) = x \\ x \in D \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 - x^2 = x \\ x \in D \end{array} \right. \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 + x - 1 = 0 \\ x \in D \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in D & \text{acceptée} \\ \text{ou } x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin D & \text{rejetée} \end{array} \right. \end{aligned}$$

(c) $\boxed{\textbf{0,5} \text{ points}}$

$(P(P(x)) - x) = 1 - \left(1 + x^4 - 2x^2\right) - x = -x^4 + 2x^2 - x$

$(P(x) - x) = -x^2 - x + 1$

La division Euclidienne donne:

$$(P(P(x)) - x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x\right)$$

donc

$$(P(x) - x) \text{ divise } (P(P(x)) - x)$$

(d) $\boxed{\text{Total question } \textbf{4,5} \text{ points}}$

La nature de la suite $(v_n)_n$.

On a $P'(x) = -2x \le 0$ sur $D = [0,1]$ donc P est $\downarrow$ sur D $\boxed{\textbf{0,25} \text{ points}}$

Or

$$\left\{ \begin{array}{c} v_0 = \dfrac{1}{2} \in D \\ \text{et } P(D) \subset D \end{array} \right. \Rightarrow v_n \in D \quad \forall n \ \boxed{\textbf{0,5} \text{ points}}$$

donc $(v_n)_{n \ge 0}$ n'est pas monotone mais $(v_{2n})_{n \ge 0}$ et $(v_{2n+1})_{n \ge 0}$ sont monotones de variation contraire.

$(v_{2n})_{n \ge 0}$ et $(v_{2n+1})_{n \ge 0}$ sont bornées donc elles sont convergentes chacune vers un point fixe de $P \circ P$.

<u>Calcul des points fixes de $P \circ P$ dans D</u>:

$$\begin{aligned}(P(P(x))-x)=0 &\Leftrightarrow \left(-x^2-x+1\right)\left(x^2-x\right)=0\\ &\Leftrightarrow x\left(-x^2-x+1\right)(x-1)=0\\ &\Leftrightarrow x\in\left\{0,1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}. \boxed{\textbf{0,75 points}}\end{aligned}$$

<u>**Monotonie de** $(v_{2n})_{n\geq 0}$:</u>

$v_0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow v_1=\dfrac{3}{4}\Rightarrow v_2=\dfrac{7}{16}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow (v_{2n})_{n\geq 0}$ est $\downarrow$ $\boxed{\textbf{0,5 points}}$

de plus

$$1>v_0>0 \boxed{\textbf{0,25 points}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\boxed{\textbf{0,5 points}}$$

donc le seul point fixe qui minore v_0 est 0 ,
par conséquent $(v_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers 0 $\boxed{\textbf{0,25 points}}$.

<u>**Méthode 1**</u>: Comme 0 n'est pas un point fixe de P $\boxed{\textbf{1 points}}$ alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ diverge $\boxed{\textbf{0,5 points}}$.

<u>**Méthode 2**</u>: Monotonie de $(v_{2n+1})_{n\geq 0}$:

$$(v_{2n})_{n\geq 0}\downarrow\Rightarrow (v_{2n+1})_{n\geq 0}\uparrow \boxed{\textbf{0,25 points}}$$

de plus

$$0<v_1=\frac{3}{4}<1\boxed{\textbf{0,25 points}}, \quad \text{et} \quad v_1>\frac{\sqrt{5}-1}{2}\boxed{\textbf{0,25 points}}$$

donc le seul point fixe qui majore v_1 est 1 ,par conséquent $(v_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers 1 $\boxed{\textbf{0,25 points}}$

D'ou $(v_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers 0 et $(v_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers 1

donc $(v_n)_{n\geq 0}$ diverge. $\boxed{\textbf{0,5 points}}$