University of Tlemcen
Faculty of Science
Thursday: 07/12/2023
Duration: 01 h 30mn

Academic Year 2023/2024
1st Year LMD-M and MI

Continuous Mechanics Test

(Calculator allowed)

Exercise 1: (05 Pts)

A. The momentum P (P=mϑ where m is a mass and ϑ is a velocity) associated with a photon depends on its frequency f according to the following expression:

$$\boldsymbol{P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma}}$$

Where c is the speed of light and σ has the following dimension $[\sigma] = \mathrm{M.L^2.T^{-1}}$.

Using dimensional analysis, find the exponents α, β and γ.

B. The average velocity of the molecules of a gas is written in the following formula:

$$\boldsymbol{\vartheta = \sqrt{\frac{PV}{m}}}$$

m being the mass of the molecule, V the volume, and p the pressure of the gas.
Calculate the relative uncertainty in ϑ as a function of **Δp, Δm and ΔV**.

Exercise 2: (05 Pts)

A. $\vec{i},\ \vec{j}\ and\ \vec{k}$ being the unit vectors of an orthonormal reference frame (Oxyz), consider the vectors. $\vec{r_1} = 2\,\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r_2} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

1- Calculate the vector product $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}$.

2- Deduce the angle θ formed by the two vectors $\vec{r_1}$ and $\vec{r_2}$.

B. Let be a polar coordinate system with origin O and unit vectors $\vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\rho}}, \vec{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$.

M is a point with coordinates $\begin{cases} \rho = 2t^3 + 1 \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constant).

1- Using a detailed diagram, give the expression of the position vector $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ and calculate the velocity vector of point M in polar coordinates.

2- Write this velocity vector $\vec{\mathbf{v}}$ (M) in cartesian coordinates $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Exercise 3: (05 Pts)

A particle moves along a trajectory whose equation is $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ such that $\mathbf{x(t) = 2\ sin(\omega t)}$.

Knowing that ω is constant and at t=0, the mobile is at point M (0, R), Determine:

1) The component y(t).
2) Velocity and acceleration vector components and their moduli.
3) Tangential and normal accelerations.
4) The nature of the motion.

Bon courage

University of Tlemcen
Faculty of Science
Thursday: 07/12/2023
Duration: 01 h 30mn

Academic Year 2023/2024
1st Year LMD-M and MI

Correction of Continuous Mechanics Test

Exercise 1: (5 pts)

A- The momentum P is given by the following expression: 2.5 pts

$$P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma} = Mv \quad \text{so } [P] = M.L^1.T^{-1} \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\text{We have } \begin{cases} [v] = [c] = L.T^{-1} \\ [f] = T^{-1} \\ [M] = M \end{cases} \textbf{(0.75 pts)} \text{ and } [\sigma] = \mathrm{M.L^2.T^{-1}}$$

$$\Longrightarrow [P] = [\sigma]^{\alpha}[f]^{\beta}[c]^{\gamma} = (M.L^2.T^{-1})^{\alpha}(T^{-1})^{\beta}\left(L\ .T^{-1}\right)^{\gamma} \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\Longrightarrow [P] = M^1L^1T^{-1} = M^{\alpha}L^{2\alpha+\gamma}T^{-\alpha-\beta-\gamma} \textbf{ (0.25 pts)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \\ -(\alpha + \beta + \gamma) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \textbf{ (0.75 pts)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P = \sigma.f.c^{-1}}$$

B- Relative uncertainty about v. (2.5pts)

$$\boldsymbol{\vartheta} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vartheta^2} = \frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \Longrightarrow \log(\boldsymbol{\vartheta^2}) = \log\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Longrightarrow 2\log\vartheta = \log P + \log V - \log m \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Longrightarrow 2\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} + \frac{dm}{m} \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Longrightarrow 2\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m} \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m}\right) \textbf{(0.5 pts)}$$

Exercise 2 : (05 pts)

A- $\vec{r_1} = 2\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\quad \vec{r_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

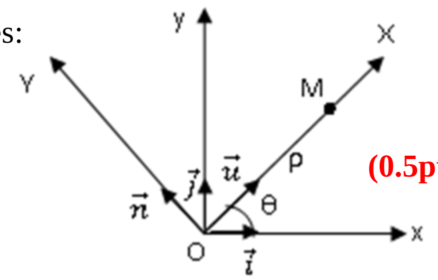
1- Calculatation of vector product $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}$.

$\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = -5\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ **(0.5 pts)**

2- $|\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}| = |\vec{r_1}|.|\vec{r_1}|.sin\theta \rightarrow sin\theta = \frac{|\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}|}{|\vec{r_1}|.|\vec{r_1}|} = 0.9 \Longrightarrow \theta \sim 64°C$ **(0.5 pts)**

B- A material point M is identified by its polar coordinates:

$$\begin{cases} \rho = 2t^3 + 1 \\ \theta = \omega t \end{cases} (\omega \ \text{ constant})$$



(0.5pts)

1- **A position vector of the point M** is : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u_\rho} = (2t^3 + 1)\vec{u_\rho}$ **(01 pts)**

The velocity vector $\vec{v}$ of point M in polar coordinates will be:

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_\rho} + \rho' \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} =$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = 6t^2\overrightarrow{U_\rho} + \rho \frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = 6t^2\overrightarrow{U_\rho} + (2t^3+1)\omega\overrightarrow{U_\theta}$$ **(01 pts)**

2- **$\vec{v}$ in cartesiennes coordonates.**

We have;

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$ **(0.5 pts)**

$$\Longrightarrow \vec{v} = 6t^2(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) + (2t^3+1)\omega(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = (6t^2cos\theta - (2t^3+1)\omega sin\theta)\vec{\imath} + (6t^2sins\theta + (2t^3+1)\omega cos\theta)\vec{\jmath}$$ **(01 pts)**

<u>Exercise 3</u> : (05 pts)

We have **$x^2 + y^2=4$** such that $\boldsymbol{x(t) = 2\sin(\omega t)}$.

1- Y(t)= ? :

$x^2 + y^2=4$ is an equation of the circular trajectory with radius R=2. So we have circular motion. So; $\boldsymbol{y(t) = 2\cos(\omega t)}$

2nd method: we have $\boldsymbol{x(t) = 2\sin(\omega t)}$ and $x^2 + y^2=4$

so $y^2=4 - x^2=4- 4\sin^2(\omega t) = 4(1-\sin^2(\omega t)$ Then: $\boldsymbol{y(t) = 2\cos(\omega t)}$ **(0.5 pts)**

2- The velocity and the acceleration:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = 2\omega\cos(\omega t) \\ v_y = -2\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$ **(01 pts)** ***so*** $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 2\omega$ **(0.5 pts)**

And $$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = -2\omega^2 sin(\omega t) \\ a_y = -2\omega^2\cos(\omega t) \end{cases}$$ **(01 pts)**

So $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2\omega^2$ **(0.5 pts)**

3- Calculation of $\boldsymbol{a_T}$, $\boldsymbol{a_N}$:

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ **(0.5 pts)** *and* $a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow a_N = a = 2\omega^2$ **(0.5 pts)**

4- The nature of the motion**:**

We have : $\vec{a}.\vec{v} = v_x.a_x + v_y.a_y = 0$

So we have a uniform circular motion (ω=cst) **(0.5 pts)**

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Jeudi: 07/12/2023

Année Universitaire 2023/2024
1ière Année LMD-M et MI
Durée : 01 h 30mn

Contrôle Continu de Mécanique

(La calculatrice est autorisée)

Exercice 1: (05 Pts)

A. La quantité de mouvement P (P=m.v avec m est une masse et v est une vitesse) associée à un photon dépend de sa fréquence **f** selon l'expression suivante :

$$\boldsymbol{P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma}}$$

Ou **c** est la **vitesse** de la lumière et σ a la dimension suivante $[\sigma] = \mathrm{M.L^2.T^{-1}}$.
En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouvé les exposants $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ **et** $\boldsymbol{\gamma}$.

B. La vitesse moyenne des molécules d'un gaz s'écrit sous la formule suivante :

$$\boldsymbol{\vartheta = \sqrt{\frac{PV}{m}}}$$

m étant la masse de la molécule, **V** le volume, et **p** la pression du gaz.
Calculer l'incertitude relative sur $\boldsymbol{\vartheta}$ en fonction de **Δp, Δm et ΔV.**

Exercice 2: (05 Pts)

A. $\vec{i}$, $\vec{j}$ $et \vec{k}$ étant les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé (Oxyz), on considère les vecteurs. $\vec{r_1} = 2\,\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r_2} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

1- Calculer le produit vectoriel $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}$.

2- Déduire l'angle θ que forme les deux vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$.

B. Soit un repère de coordonnées polaires d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{u}_\rho}, \vec{\mathbf{u}_\theta}$.

M est un point quelconque de coordonnées $\begin{cases} \rho = 2t^3 + 1 \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante).

1- A l'aide d'un schéma détaillé, donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ et calculer le vecteur vitesse du point M en coordonnées polaires.

2- Ecrire ce vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ (M) en coordonnées cartésiennes $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Exercice 3: (05 Pts)

Une particule se déplace sur une trajectoire dont l'équation de la trajectoire est $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ de telle sorte que $\boldsymbol{x(t) = 2\sin(\omega t)}$.

Sachant que ω est constante et à t=0, le mobile se trouve au point M (0, R), Déterminer :

1. La composante y(t).
2. Les composantes du vecteur vitesse et accélération et leurs modules.
3. Les accélérations tangentielle et normale.
4. La nature du mouvement.

Bon courage

Le corrigé du Contrôle Continu

Exercice 1: (5 pts)

A- La quantité de mouvement P est donnée par l'expression suivante : 2.5 pts

$$P = \sigma^{\alpha} f^{\beta} c^{\gamma} = mv \quad \text{D'où } [P] = M.L^{1}.T^{-1} \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\text{Car} \begin{cases} [v] = [c] = L.T^{-1} \\ [f] = T^{-1} \\ [M] = M \end{cases} \textbf{(0.75 pts)} \text{ avec } [\sigma] = M.L^{2}.T^{-1}$$

$$\Rightarrow [P] = [\sigma]^{\alpha}[f]^{\beta}[c]^{\gamma} = (M.L^{2}.T^{-1})^{\alpha}(T^{-1})^{\beta}(L\ .T^{-1})^{\gamma} \textbf{(0.25 pts)}$$

$$\Rightarrow [P] = M^{1}L^{1}T^{-1} = M^{\alpha}L^{2\alpha+\gamma}T^{-\alpha-\beta-\gamma} \textbf{ (0.25 pts)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \\ -(\alpha+\beta+\gamma) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \textbf{ (0.75 pts)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = \sigma.f.c^{-1}}$$

B- L'incertitude relative sur v. (2.5pts)

$$\boldsymbol{\vartheta} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vartheta^{2}} = \frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \Rightarrow \log(\boldsymbol{\vartheta^{2}}) = \log\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{m}} \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Rightarrow 2\log\vartheta = \log P + \log V - \log m \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Rightarrow 2\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} + \frac{dm}{m} \textbf{ (0.5 pts)}$$

$$\Rightarrow 2\frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m} \textbf{(0.5 pts)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta m}{m}\right) \textbf{(0.5 pts)}$$

Exercice 2 : (05 pts)

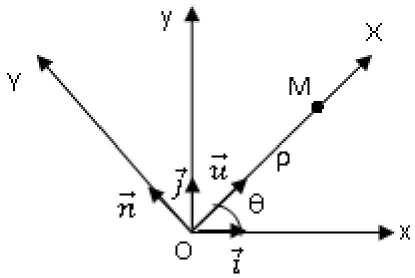
A- $\vec{r_1} = 2\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\quad \vec{r_2} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

1- Calcul du produit vectoriel $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}$.

$\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = -5\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ **(0.5 pts)**

2- $|\vec{r_1} \wedge \vec{r_2}| = |\vec{r_1}|.|\vec{r_1}|.sin\theta \rightarrow sin\theta = \frac{|\vec{r_1}\wedge\vec{r_2}|}{|\vec{r_1}|.|\vec{r_1}|} = 0.9 \Rightarrow \theta \sim 64°C$ **(0.5 pts)**

B- Un point matériel M est repéré par ses coordonnées polaires :



(0.5 pts)

$$\begin{cases}\rho = 2t^3 + 1 \\ \theta = \omega t\end{cases} (\omega \text{ constante})$$

1- **Le vecteur position du point M** est : $\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u_\rho} = (2t^3 + 1)\overrightarrow{u_\rho}$ **(01 pts)**

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires sera.

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_\rho} + \rho' \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} =$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 6t^2\overrightarrow{U_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 6t^2\overrightarrow{U_\rho} + (2t^3 + 1)\omega\overrightarrow{U_\theta}$$ **(01 pts)**

2- **$\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.**

On a

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}\end{cases}$$ **(0.5 pts)**

$$\Rightarrow \vec{v} = 6t^2(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) + (2t^3 + 1)\omega(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (6t^2cos\theta - (2t^3 + 1)\omega sin\theta)\vec{\imath} + (6t^2sins\theta + (2t^3 + 1)\omega cos\theta)\vec{\jmath}$$ **(01 pts)**

<u>Exercice 3</u> : (05 pts)

On a **$x^2 + y^2$=4** de telle sorte que **$x(t) = 2\sin(\omega t)$.**

1- Y(t)= ? :

$x^2 + y^2=4$ est une équation d'une trajectoire circulaire de rayon R=2. Donc on a un mouvement circulaire. Donc ; $\boldsymbol{y(t) = 2\cos(\omega t)}$

2nd methode: $\boldsymbol{x(t) = 2\sin(\omega t)}$ et $x^2 + y^2=4$ donc $y^2=4 - x^2=4- 4\sin^2(\omega t) = 4(1 - \sin^2(\omega t)$ alors :

$\boldsymbol{y(t) = 2\cos(\omega t)}$ **(0.5 pts)**

2- La vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases}v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_x = 2\omega\cos(\omega t) \\ v_y = -2\omega\sin(\omega t)\end{cases}$$ **(01 pts)** Donc $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 2\omega$ **(0.5 pts)**

Et $\begin{cases}a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_x = -2\omega^2 sin\,(\omega t) \\ a_y = -2\omega^2\cos(\omega t)\end{cases}$ **(01 pts)**

Donc $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = 2\omega^2$ **(0.5 pts)**

3- Calcul de a_T , a_N :

$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ **(0.5 pts)**

$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Rightarrow a_N = a = 2\omega^2$ **(0.5 pts)**

4- La nature du mouvement:

On a $\vec{a}.\vec{v} = v_x.a_x + v_y.a_y = 0$

Donc on un mouvement circulaire uniforme (ω=cst) **(0.5 pts)**