Exercice 1

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right),\qquad g(x)=\sqrt{4-|x-1|},\qquad h(x)=\frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x}).$$

2. a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction quelconque. En posant

$$f_1(x)=f(x)+f(-x) \text{ et } f_2(x)=f(x)-f(-x)$$

Montrer que f_1 est paire et que f_2 est impaire.
b) Etudier la parité des fonctions suivantes aprés avoir déterminer leur domaines de définition

$$f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x},\qquad g(x)=\sin x-\cos x,\qquad h(x)=\frac{x^4}{|x|-1}\text{ (supp)}$$

3. Etudier La périodicité de la fonction $\sin(x-E(x))$. (Déja fait au cours)

Exercice 2

1. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction, que

$$\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{2}{x^2})=0,\qquad \lim_{x\to 1}(\frac{x^2+x-2}{x^2-1})=\frac{3}{2}$$

2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}.$$

Exercice 3
Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x}, & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ 3be^x-x, & \text{si } x>0\end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Les fonctions suivantes sont-elle prolongeable par continuété au point x_0 indiqué? Si oui ecrire leur prolongée.

1) $f(x) = \sin x \cos(\frac{1}{x}),\ (x_0 = 0),$ 2) $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ (x_0 = 1)$

Exercice 5

1. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^9 + x^3 + 2$. A l'aide d'une version du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction admet au moins une racine réelle. Cette racine est elle unique? justifier
2. Meme question pour $f(x) = x + e^x$. (supp)

Exercice 6 (supp)

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{x+3}{2E(x)-1}, \qquad g(x) = \frac{x - \sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1 - \ln x}.$$

2. Vérifier si les fonctions suivantes sont strictement monotones sur leurs domaines de définitions

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_2(x) = x^3, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}$$

Attention: n'utiliser que la définition d'une fonction monotone

Exercice 7 (supp)

1. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction, que

$$\lim_{x\to 2} 3x + 1 = 7, \qquad \lim_{x\to+\infty} (\frac{x+2}{x}) = 1$$

2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 1^+} (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}), \qquad \lim_{x\to 0} xE(\frac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x + 5}{x^2+4}.$$

Exercice 8 (supp)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction défini par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, si $x \neq 0$. Déterminer l'ensemble de définition puis l'ensemble des points ou ell est continue.