Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°3
Suites numériques.
$1^{ère}$ LMD $2023-2024$

Exercice 1

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $U_n = \dfrac{n-2}{2n}$.
   Par deux méthodes différentes, montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle monotone?
2. Donner la définition mathématique d'une suite qui n'est pas croissante.
3. Montrer que la suite de terme général $V_n = n \times (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, n'est pas croissante. Une suite non croissante est-elle décroissante?

Exercice 2

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{5n-1}{2n+1} = \frac{5}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

2. Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}), \qquad \lim_{n\to+\infty} (n-\sqrt{(n+1)(n-2)}), \qquad \lim_{n\to+\infty} (\frac{3+(\pi\times 7^n)}{5-(e\times 7^n)}).$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}), \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \sin(n^3+1)}{n^3+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}\right)$$

Exercice 3
On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + \dfrac{3}{2U_n}$ et $U_0 = 1$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.
   b) si la suite (U_n) converge, déterminer sa limite?
2. a) Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - l > 0$.
   b) En déduire que (U_n) est décroissante, que peut-on conclure?

Exercice 4

Dans chaque cas suivant étudier si les suites sont adjacentes. Dans l'affirmative déterminer leur limite commune si c'est possible

1. $U_n = 3 - \dfrac{1}{n^2}$ et $V_n = 3 + \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \sin(\dfrac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

1. On considère la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{4}{5}U_n + \frac{1}{5}$ et $U_0 = 0$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_{n+1} - U_n| = (\frac{4}{5})^n\, |U_1 - U_0|$.
   b) Déduire que (U_n) est de Cauchy, calculer alors la limite.
2. Montrer que la suite $U_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ est de Cauchy, que déduiser vous.
3. (**Supp**) Montrer que la suite $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k!}$ est de Cauchy, que déduiser vous.
4. Montrer que la suite $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante et n'est pas de Cauchy (Indication calculer $|U_{2n} - U_n|$), que déduiser vous .

Exercice 6 (**Supp**)

1. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général U_n définie par
$$U_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+n}.$$
   est convergente et déterminer sa limite.
2. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général U_n définie par
$$U_n = \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times ... \times (3n+3)}.$$
   est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 (**Supp**)

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définies par
$$U_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la meme limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).