Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°1
Les nombres réels
Licence 1ère *année* $2023-2024$

Exercice 1

1. Soit $r_1 = 0,2023$, $r_2 = 0,20232023...2023$ (n fois) et $r_3 = 0,20232023...$ (une infinité de fois). Ecrire les nombres r_1, r_2, r_3 sous la forme rationnelle.
2. Montrer que si a^2 est un multiple de 2, alors a est un multiple de 2.
3. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont irrationnels.
4. Montrer que si n est un nombre premier alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.
5. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N},\ p \neq q : (\sqrt{p}+\sqrt{q}) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{p}-\sqrt{q}) \notin \mathbb{Q}$.

(Facultatif)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, qui ne sont pas des carrés parfaits alors $\sqrt{n}+\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors $x+y \notin \mathbb{Q}$.
5. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \notin \mathbb{Q}$ alors $x \times y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-2|+|x-3| = 3$, puis $\left|2x^2-1\right| \leq |x+1|$
2. Soient x et y deux réels, montrer que:
   (a) $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$.
   (b) $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.
   (c) $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$. **(Facultatif)**
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.
   Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) \leq f(x)+f(y)$. **(Facultatif)**

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$E\left(\frac{2x+1}{3}\right)-2 = 0, \quad E(x+a) = 2, a \in \mathbb{R}. \quad 3E(x^2+2x)-4=0,$$
$$E(x) \geq 1, \quad -1 \leq E(3x) \leq 1, \quad E(x)+|x-1| = x,$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on à $E(x+n) = E(x) + n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
5. Montrer que $\forall p \in \mathbb{Z}$ on à $E(p) + E(-p) = 0$. **(Facultatif).**
6. Montrer que $\forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on à $E(p) + E(-p) + 1 = 0$. **(Facultatif).**

Exercice 4

1. Donner la définition d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
2. Soit les sous-ensembles suivants:
   $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 4]$,
   $C = \{x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{x} > 2\}$.
   (a) Mettre ces ensembles sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
   (b) Pour quoi l'ensemble B, n'est pas un intervalle?
   (c) Déterminer les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles éxistes), et préciser s'il y a un maximum et un minimum.

Exercice 5

Soit les sous-ensembles suivants:
$A = \left\{\frac{x+1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}, x \leq -3\right\}$, $B = \left\{\frac{n+3}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
$D = \left\{2 - \frac{8}{n+4},\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $E = \left\{\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n+2}{3}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Pour les ensembles (A, B, C seulement **"D et E Facultatif"**), Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément.
2. A l'aide de la caractérisation des bornes supérieure et inférieure, montrer que
$$\max(]0,2]) = \sup(]0,2]) = 2,\ \ \inf(]0,2]) = 0.$$
$$\sup B = \frac{3}{2},\ \ \inf B = 1$$
3. Meme question pour l'ensemble D.**(Facultatif)**

Exercice 6

A et B deux parties non vides bornéé de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Si $(A \subset B) \Rightarrow (\sup A \leq \sup B)$ et $(\inf B \leq \inf A)$.
2. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}$.
3. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A,\ \inf B\}$. **(Facultatif)**