Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Samedi 16/12/2023
Durée: 1h30 min
$1^{ère}$ LMD

Contrôle continu: Analyse 1

Calculatrices et téléphones non autorisés.

Exercice 1: [9 pts]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation, $E(|x+3|) = 1$.
   où $E(.)$ désigne la partie entière d'un réel telle que $E(.) \in \mathbb{Z}$ et $|\ .\ | \in \mathbb{R}^+$.
2. On rappelle que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels (c'est à dire que $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$).
   Montrer alors par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est irrationnel.
3. Soit
   $$I = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 5[\,.$$
   (a) Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
   (b) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de I.

Exercice 2: [5 pts]
Soient les nombres complexes a et b tels que

$$a = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad b = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1).$$

1. Vérifier que $b = (1+i) \times a$.
2. En déduire que $|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(b) = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante: $z^3 + z^2 + z = 0$.

   On donne:

$$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}, \ \cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 3: [6 pts]
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$, $U_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.
2. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone?
3. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente? Quelle serait sa limite?

University of Tlemcen
Faculty of Science
Department of Informatic

Saturday 16/12/2023
1h30
1^{st} LMD.

Continuous control : Analysis 1

Unauthorized calculators and phones.

Exercise 1: [9 pts]

1. Resolve in $\mathbb{R}$, $E(|x+3|) = 1$.
   " $E(.)$ designate the integer part of a real. $E(.) \in \mathbb{Z}$ and $|\ .\ | \in \mathbb{R}^+$ ".
2. Let $\sqrt{2}$ and $\sqrt{5}$ two irrationals numbers. Show by absurd that, the number $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is irrational.
3. Let
$$I = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 5[\,.$$
   (a) Put these set an interval union.
   (b) Find the set of all upper bound, lower bound, supremum, infimum, maximum and minimum if there exists.

Exercise 2: [5 pts]
Let a and b be two complex numbers such that :
$a = \sqrt{3} - i$, $b = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$.

1. Check that $b = (1+i) \times a$.
2. Deduce that $|b| = 2\sqrt{2}$ and $\arg(b) = \dfrac{-\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Resolve in $\mathbb{C}$, the following equation: $z^3 + z^2 + z = 0$.

   We give:
$$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercise 3: [6 pts]
Let $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a number sequence, such that :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n}$ and $U_0 = 2$.

1. Show that $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$
2. The sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is it monotone?
3. The sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is it a convergent sequence? what would be its limite.

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Samedi 16/12/2023
Durée: 1h30 min
$1^{ère}$ LMD

Corrigé du contrôle continu: Analyse 1

Exercice 1: [9 pts]

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation: $E(|x+3|) = 1$.
Par la définition de la partie entière d'un réel, on a

$$E(|x+3|) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq |x+3| < 2 \qquad (*) \qquad (0{,}5)$$

Si $x+3 \geq 0$, i.e $x \geq -3$, alors :

$$(*) \Leftrightarrow 1 \leq x+3 < 2 \Longleftrightarrow -2 \leq x < -1. \qquad (0{,}75)$$

Ainsi $x \geq -3$ et $-2 \leq x < -1$. D'ou $x \in [-2, -1[$.
Si $x+3 \leq 0$, i.e $x \leq -3$, alors:

$$(*) \Leftrightarrow -2 < x+3 \leq -1 \Leftrightarrow -5 < x \leq -4. \qquad (0{,}75)$$

Ainsi $x \leq -3$ et $-5 < x \leq -4$. D'ou $x \in]-5, -4]$.
Conclusion

$$E(|x+3|) = 1 \Leftrightarrow x \in]-5, -4] \cup [-2, -1[. \qquad (0{,}5)$$

2. Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $\sqrt{2}+\sqrt{5} = r$. (0,25)

$$\sqrt{2}+\sqrt{5} = r \Leftrightarrow \sqrt{2} = r - \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 = r^2 + 5 - 2r\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{r^2+3}{2r} \in \mathbb{Q}. \text{ Absurde.} \qquad (01)$$

Conclusion

$$\sqrt{2}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}. \qquad (0{,}25)$$

3. a) Montrer que I est la réunion de deux intervalles

$$I = \{x \in \mathbb{R}, (x-3)(x+2) \geq 0\} \cap [-4, 5[$$

$(x-3)(x+2) \geq 0$ si $(x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[)$,
Donc

$$I = (]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[) \cap [-4, 5[\qquad (0{,}75)$$

Conclusion

$$I = [-4, -2] \cup [3, 5[\qquad (0{,}75)$$

b) Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum de I.
- L'ensemble des majorants de I sont $[5, +\infty[$. (0,5)

- L'ensemble des minorants de I sont $]-\infty, -4]$. (0,5)
- La borne supérieure de I est 5. (0,5)
- La borne inférieure de I est -4. (0,5)
- Le maximum n'existe pas. (0,5)
- Le minimum de I est -4. (0,5)

Exercice 2: [5 pts]
Soient les nombres complexes a et b tels que
$a = \sqrt{3} - i$ et $b = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$.

1. Vérifier que $b = (1+i) \times a$.

$$b = (1+i) \times a = (1+i)(\sqrt{3} - i) = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1) \qquad (0{,}25)$$

2. En déduire que $|b| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(b) = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$|b| = |(1+i) \times a| = |1+i|\,|a| \qquad (0{,}25)$$

$$|1+i| = \sqrt{2}, \left|\sqrt{3} - i\right| = (\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}) = 2 \qquad (0{,}25+0{,}25)$$

$$\arg(b) = (\arg(1+i) + \arg(a)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \qquad (0{,}5)$$

Posons $\theta_1 = \arg(1+i)$ et $\theta_2 = \arg(a)$.
Si $\theta_1 = \arg(1+i)$, alors

$$\cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Ainsi } \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \qquad (0{,}25)$$

Si $\theta_2 = \arg(a)$, alors

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin(\theta_2) = -\frac{1}{2}. \text{ Ainsi } \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \qquad (0{,}25)$$

Donc

$$\arg(b) = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi = (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \qquad (0{,}5)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^3 + z^2 + z = 0$.

$$z^3 + z^2 + z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + z + 1) = 0 \qquad (0{,}5)$$

$$(z_1 = 0) \qquad (0{,}5)$$

$$\Delta_{(z^2+z+1)} = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 = (i\sqrt{3})^2 \qquad (0{,}5)$$

$$z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}. \qquad (0{,}5+0{,}5)$$

Exercice 3 : **[6 pts]**

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ?

3) La suite est-elle convergente? Quelle serait sa limite?

REP :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

1-a) Initialisation

si $n = 0$, $U_0 = 2$ par définition, et on a bien $2 > 1$. **(0.25)**

1-b) Hérédité

(HR) On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $U_k > 1$ pour tout $k \leq n$. **(0.25)**

On montre alors que $U_{n+1} > 1$.

Première méthode : **(01)**

signe de $U_{n+1} - 1$.

$$U_{n+1} - 1 = 2 - \frac{1}{U_n} - 1 = 1 - \frac{1}{U_n}$$
$$= \frac{U_n - 1}{U_n}.$$

D'après (**HR**), $U_n - 1 > 0$ et forcément $U_n > 0$. Donc

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{U_n} > 0. \text{ Ainsi } U_{n+1} > 1.$$

Deuxième méthode : **(01)**

D'après (**HR**),

$$U_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{U_n} > -1$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{U_n} > 2 - 1 \Rightarrow U_{n+1} > 1.$$

* **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$. **(0.5)**

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(2 - \frac{1}{U_n}\right) - U_n = -\frac{U_n^2 - 2U_n + 1}{U_n} = -\frac{(U_n - 1)^2}{U_n} < 0. \quad \textbf{(0.5)+(0.5)}$$

car $U_n > 1 > 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n < 0$ ce qui signifie que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) **décroissante**. **(01)**

3) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ étant **décroissante et minorée**, elle converge vers l. **(0.5)**

Calcul de l : $U_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{U_n} \rightarrow l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{U_n}\right)$

$$= 2 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = 2 - \frac{1}{l}.$$

(1.5)

Ainsi $l = 2 - \dfrac{1}{l}$ - $l^2 = 2l - 1$ - $(l - 1)^2 = 0$, d'où $l = 1$.