Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2022-2023.

Master II : EDP et Applications
Module : Théorie de Régularité
Durée : 1h30

Épreuve Finale

Exercice-01 : **(05 points)**

I. Soit $N \geq 2$ et $1 < p < \infty$. Démontrer qu'il existe une constante C tel que pour tout $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\big|u(x)\big| \leq C\big|x\big|^{-\frac{N-1}{2}}\left(\big\|\nabla u\big\|_2 + \big\|u\big\|_2\right)$$

II. Soient $N \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + N > 0$. On désigne par $|.|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$.

— Vérifier que

$$\operatorname{div}|x|^\alpha x = (\alpha + N)|x|^\alpha.$$

— Démontrer l'inégalité de Hardy-Sobolev suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p |x|^\alpha \, dx \leq \left(\frac{p}{\alpha + N}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p |x|^{\alpha+p} \, dx \qquad \forall u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$$

Exercice-02 : **(06 points)**

Soit le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u &\geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \qquad (1)$$

$f \in L^m(\Omega)$, est une fonction positive et $\frac{pN}{N+p} \leq m < \frac{N}{p}$, $p \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

1. Démontrer l'existence de la solution faible du problème (1).

   Soit la fonction convexe $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Psi(s) = \begin{cases} s^\beta, & 0 \leq s \leq T, \\ \beta T^{\beta-1}(s - T) + T^\beta, & s > T, \end{cases}$$

   Avec $\beta = \frac{m^{**}}{p^*} > 1$

2. Démontrer que :

$$-\Delta_p(\Psi(u)) \leq |\Psi'(u)|^{p-1}(-\Delta_p(u)).$$

3. A l'aide de la fonction Ψ démontrer que la solution $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$ avec $m^{**} = \dfrac{Nm}{N - pm}$, de plus, il existe une constante positive C, tel que

$$\big\|u\big\|_{m^{**}} \leq C\big\|f\big\|_m$$

Exercice-03 : **(09 points)**

I. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w \quad + \quad \mu w_+^{m-1} = \lambda w_+^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \quad w \quad = \quad 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Où $2 < p \leq 2^* < m$, $\lambda, \mu > 0$.

1. Fixer le cadre fonctionnel de la solution.
2. Donner la fonctionnelle d'énergie ainsi que la formulation variationnelle du problème (2).
3. Démontrer l'existence de solutions faible du problème (2).
4. Démontrer que la solution du problème (2) est positive.
5. Soit la fonction Ψ_ϵ donnée par

$$\Psi_\epsilon(s) = \begin{cases} 0, \quad s < k, \\ \dfrac{s-k}{\epsilon}, \quad k < s < k+\epsilon, \\ 1, \quad s > k+\epsilon \end{cases}$$

   On définit

$$E_k = \{x \in \Omega : \ w(x) > k\}$$

   En utilisant $\Psi_\epsilon(w)$ comme fonction test dans (2), démontrer que la solution $w \in L^\infty(\Omega)$.

II. Pour $\lambda = 1$, $p = 2^*$ et $\mu = 0$, $\Omega = B_1(0)$, le problème (2) devient :

$$\begin{cases} -\Delta w & = & w^{2^*-1} & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad w & \geq & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad w & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

1. Donner l'identité de Poholzaev.
2. Démontrer que la seule solution est la solution triviale.

Bonne chance.