Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Janvier 2023.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

Durée : 1h50mn

Epreuve finale

Problème

Etant donné le pb parabolique (généralisé) suivant :

$$[1_v]\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial t}+Ay=f+Bv & \text{ds }]0,T[\\ y(0)=y_0\end{cases}$$

$f\in L^2(0,T;V')$ où V' est le dual topologique de V ($\mathbb{R}$-esp. de Hilbert) tel que l'on a $V\hookrightarrow H\equiv H'\hookrightarrow V'$ (où H $\mathbb{R}$-esp. Hilbert avec H' identifié à H) $y_0\in H$.

$[1_v]$ est bien posé au sens d'Hadamard c.à.d. admet une solution unique $y(v)$ dépendant continûment des données f, Bv et y_0 : $\exists C_y>0$ telle que :

$$\|y(v)\|_{W(0,T)}\leqslant C_y\left(\|f\|_{L^2(0,T;V')}+\|Bv\|_{L^2(0,T;V')}+|y_0|_H\right)$$

$v\in\mathcal{U}_{ad}\subset L^2(0,T;\mathcal{U})$ ($\mathcal{U}$ étant, également, un $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert)

et $B\in\mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}),L^2(0,T;V'))$. $A\in\mathcal{L}(V,V')$.

On définit alors la fction-coût : $J(v)=\frac{1}{2}\left[|Dy(v)-y_d|_H^2+\int_0^T\langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}}dt\right]$

où $Dy(v)=\sum_{i=1}^{M}D_i\,y(t_i,v)$ avec t_i ($i=\overline{1,M}$) sont M pts distincts de l'intervalle $]0,T[$ t.q. $0<t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_M<T$. $D_i\in\mathcal{L}(H,H)\ \forall i=\overline{1,M}$.

$y_d\in H$, $N\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ (N auto-adjoint et coercif : $\exists\alpha_N>0/\forall v\in\mathcal{U}\ \langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}}\geqslant\alpha_N\|v\|_{\mathcal{U}}^2$)

1) De quel type d'observation il s'agit ici ? (1pt)

2) Montrer que : $\forall i=1,\dots,M$ $y(t_i;v)\in H$. (1pt)

3) Montrer que $D\in\mathcal{L}(H,H)$. (1pt)

4) Montrer que l'application $Appl: v\mapsto Dy(v)$ est affine de $L^2(0,T;\mathcal{U})$ dans H. (2pts)
<u>Indication</u> : Ici, il faut montrer que $Appl(v)=Dy(v)=\mathcal{A}'v+\mathcal{B}'$ où $\mathcal{A}'$ est un opérateur linéaire et continu de $L^2(0,T;\mathcal{U})$ ds H et $\mathcal{B}'\in H$.

5) Montrer, également, que $Appl$ est continue de $L^2(0,T;\mathcal{U})$ dans H. (2pts)
<u>Indication</u> : Utiliser, ici, le fait que $y(v)$ dépend continûment des données en considérant le pb homogène associé à $[1_v]$ avec $f=0_{L^2(0,T;V')}$ et $y_0=0_H$

6) Montrer, en détails, que J, en fction de v, est continue de $L^2(0,T;\mathcal{U})$ ds $\mathbb{R}$.
<u>Indication</u> : Remarquer, ici, que J est composée d'applications dont il faut montrer qu'elles sont, toutes, continues par rapport à v. (2pts)

7) Montrer alors que J est coercif. (1pt)
<u>Indication</u> : Ici, il faut montrer qu'il existe $\alpha_J>0$ / $J(v)\geqslant\alpha_J\|v\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})}^2$

8) Convexité de J

8a) Sachant que J est G-dérivable sur $L^2(0,T;\mathcal{U})$, calculer $\langle J'(v), w\rangle$ et m.q. $\langle J'(v), w\rangle = \langle \mathcal{A}'w, Dy(v) - y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}} dt$ où $\mathcal{A}'$ est l'opérateur linéaire figurant ds l'expression de $Dy(v)$ en fction de v. (3 pts)

Rappels: $\langle J'(v), w\rangle := \lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\left[J(v+\theta w) - J(v)\right]$ et $Dy(v) = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}'$.

Indication: On pourra admettre le résultat de calcul de limite svt :
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{2\theta}\left[\langle Dy(v+\theta w), Dy(v+\theta w)\rangle_H - \langle Dy(v), Dy(v)\rangle_H\right] = \langle \mathcal{A}'w, Dy(v)\rangle_H$$

8b) Calculer $\langle J'(v), w-v\rangle$ et m.q. $\langle J'(v), w-v\rangle = \langle Dy(v) - y_d, Dy(w) - Dy(v)\rangle_H$
$+ \int_0^T \langle Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$ (1pt)

8c) Montrer que J est convexe sur $L^2(0,T;\mathcal{U})$. (2pts)

Rappel: J convexe $\Leftrightarrow$ J' monotone c.à d. $\forall v, w \in L^2(0,T;\mathcal{U})$
$\langle J'(v) - J'(w), v-w\rangle \geq 0$

8d) On en déduit que J est même strictement convexe. (1pt)

9) $\mathcal{U}_{ad}$ étant une partie convexe fermée de $L^2(0,T;\mathcal{U})$, montrer qu'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ unique (contrôle optimal) t.q. $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ (1pt)

10) u étant le contrôle optimal, montrer qu'il est caractérisé par le problème: (1pt)
$$\begin{cases} y(u) \in L^2(0,T;V) \\ \left\langle \frac{\partial y(u)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{V',V} + a(y(u), \varphi) = \langle f, \varphi\rangle_{V',V} + \langle Bu, \varphi\rangle_{V',V} \\ \qquad \text{ds }]0,T[,\ \forall \varphi \in V \end{cases}$$
où la forme bilinéaire "a" est à préciser.

11) Ecrire l'inéquation d'Euler associée au pb de minimisation de J sur $\mathcal{U}_{ad}$: $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ (1pt)

Indication: Utiliser la question 8b).

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Janvier 2023.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'épreuve finale

Problème

$$[1_v]\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + Bv \text{ ds }]0,T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad J(v) = \frac{1}{2}\left[|Dy(v) - y_d|_H^2 + \int_0^T \langle Nv, v\rangle_U \, dt \right]$$

où $Dy(v) = \sum_{i=1}^{M} D_i\, y(t_i, v)$ avec $t_i \in]0,T[\ \forall i = \overline{1,M}$

1) Ici, il s'agit d'une observation ponctuelle ou discrète sur $]0,T[$. 1pt

2) $y(v) \in L^2(0,T;V) \Rightarrow \forall t \in]0,T[\ y(t;v) \in V \subset H \Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ y(t_i, v) \in H$. 1pt 1pt

3) $\forall i = 1,\dots,M \ D_i \in \mathcal{L}(H,H)$ et D est une somme d'opérateurs de $\mathcal{L}(H) \Rightarrow D \in \mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H,H)$.

4) $y(v)$ s'écrit en fction de v comme suit : $y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ où $\mathcal{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} B$ 0.5pt
et $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} f \Rightarrow \forall t \in]0,T[\ y(t;v) = \mathcal{A}v(t) + \mathcal{B}(t) \Rightarrow \forall i = 1,\dots,M \ y(t_i;v) = \mathcal{A}v(t_i) + \mathcal{B}(t_i)$
$\Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ D_i\, y(t_i,v) = D_i \mathcal{A} v(t_i) + D_i \mathcal{B}(t_i) \Rightarrow Dy(v) = \sum_{i=1}^{M} D_i\, y(t_i,v) = \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{A} v(t_i) + \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{B}(t_i)$
$\Rightarrow Dy(v) = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}'$ où $\mathcal{A}'v = \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{A} v(t_i)$ et $\mathcal{B}' = \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{B}(t_i) \in H$ 0.5pt
$\mathcal{A}'$ linéaire car $\mathcal{A}'(\alpha v_1 + v_2) = \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{A}(\alpha v_1(t_i) + v_2(t_i))$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v_1, v_2 \in L^2(0,T;U)$

0.5pt $= \alpha \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{A} v_1(t_i) + \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{A} v_2(t_i) =: \alpha \mathcal{A}'v_1 + \mathcal{A}'v_2 \in H$

car $\mathcal{A}v_1$ et $\mathcal{A}v_2 \in L^2(0,T;V) \Rightarrow \forall t \in]0,T[\ \mathcal{A}v_1(t)$ et $\mathcal{A}v_2(t) \in V \Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ \mathcal{A}v_1(t_i), \mathcal{A}v_2(t_i) \in V \subset H$
Par ailleurs, $\mathcal{B}' \in H$ car $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} f \in L^2(0,T;V) \Rightarrow \mathcal{B}(t) \in V \ \forall t \in]0,T[\Rightarrow \mathcal{B}(t_i) \in V \subset H$ $\forall i = 1,\dots,M$
et $\forall i = \overline{1,M} \ D_i \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ D_i \mathcal{B}(t_i) \in H \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} D_i \mathcal{B}(t_i) = \mathcal{B}' \in H$. 0.5pt

5) $Appl : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$
$v \longmapsto Appl(v) = Dy(v) = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}'$ est continue $\Leftrightarrow \mathcal{A}'$ est continue $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ est continue $\Leftrightarrow \exists C_{\mathcal{A}} > 0 \,/\, \forall v \in L^2(0,T;U) \ \|\mathcal{A}v\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_{\mathcal{A}} \|v\|_{L^2(0,T;U)}$.
Or $y_h(v) = \mathcal{A}v$ est sol. unique de $[1_v]_{hom}$: $\begin{cases} \partial y_h/\partial t + Ay_h = Bv \text{ ds }]0,T[\\ y_h(0) = 0_H \end{cases}$ avec $f = 0_{L^2(0,T;V')}$
t.q. $\|y_h(v)\|_{W(0,T)} \leq C_{y_h} \|Bv\|_{L^2(0,T;V')}$
$\leq \underbrace{C_{y_h} \|B\|_{\mathcal{L}(L^2(0,T;U), L^2(0,T;V'))}}_{C_{\mathcal{A}}} \|v\|_{L^2(0,T;U)} \Rightarrow \|\mathcal{A}v\|_{L^2(0,T;V')} \leq C_{\mathcal{A}} \|v\|_{L^2(0,T;U)}$

1pt

Donc $\mathcal{A}$ est cont. % à $v \Rightarrow v \mapsto y(v)$ cont. % à $v \Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ v \mapsto y(t_i, v)$ cont. % à v (continuité de l'application-trace) $\Rightarrow \forall i = \overline{1,M} \ v \mapsto D_i\, y(t_i,v)$ cont. % à v car $D_i \in \mathcal{L}(H)$ $\forall i = \overline{1,M}$
$\Rightarrow v \longmapsto Dy(v) = \sum_{i=1}^{M} D_i\, y(t_i,v) = Appl(v)$ cont. % à v. 1pt

6) J cont. % à v car J est une somme de 2 fonctions continues % à v. (0.25) En effet $v \mapsto Dy(v)$ (0.25) cont. % à v (Voir 5)), $v \mapsto y_d$ (0.25) cont. % à v (y_d const. % à v) $\Rightarrow v \mapsto Dy(v) - y_d$ (0.25) cont. % à v et $|\cdot|_H$ (0.25) cont. ainsi que la fonction "carré" (0.25) $\Rightarrow v \mapsto |Dy(v) - y_d|^2$ cont. par rapport à v. D'un autre côté, $v \mapsto Nv$ (0.25) cont. % à v (car $N \in \mathcal{L}(U,U)$) et la fonction produit scalaire est continue % à ses deux arguments $\Rightarrow v \mapsto \langle Nv, v\rangle_{L^2(0,T;U)}$ continue % à v. (0.25)

7) Par construction de J, $J(v) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^T \langle Nv(t), v(t)\rangle_{\mathcal{U}}\, dt \geqslant \frac{\alpha_N}{2}\int_0^T \|v(t)\|_{\mathcal{U}}^2\, dt$

c.à.d. $J(v) \geqslant \alpha_J \|v\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{U})}$ $\forall v\in L^2(0,T;\mathcal{U}) \Rightarrow J$ coercif. $(\alpha_J = \alpha_N/2)$ 1pt

8) <u>Convexité de J</u>

<u>8a)</u> $\langle J'(v), w\rangle = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{\theta}\left(J(v+\theta w) - J(v)\right)$

$$= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\left[\langle Dy(v+\theta w)-y_d, Dy(v+\theta w)-y_d\rangle_H - \langle Dy(v)-y_d, Dy(v)-y_d\rangle_H\right]$$

1pt

$$+\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\int_0^T\left(\langle N(v+\theta w), v+\theta w\rangle_{\mathcal{U}} - \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}}\right)dt$$

$$= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\Big[\langle Dy(v+\theta w), Dy(v+\theta w)\rangle_H + \cancel{\langle y_d, y_d\rangle_H} - 2\langle Dy(v+\theta w), y_d\rangle_H$$

1pt

$$- \langle Dy(v), Dy(v)\rangle_H - \cancel{\langle y_d, y_d\rangle_H} + 2\langle Dy(v), y_d\rangle_H\Big]$$

$$+\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\int_0^T\left(\cancel{\langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}}} + \theta^2\langle Nw,w\rangle_{\mathcal{U}} + \theta\langle Nv,w\rangle_{\mathcal{U}} + \theta\langle Nw,v\rangle_{\mathcal{U}} - \cancel{\langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}}}\right)dt$$

Indication de la quest. <u>8a)</u>

$$\stackrel{}{=} \langle \mathcal{A}'w, Dy(v)\rangle_H + \left\langle -\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(Dy(v+\theta w) - Dy(v)\right), y_d\right\rangle_H +$$

N auto-adjoint

$$+\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2}\int_0^T\left(\theta\langle Nw,w\rangle_{\mathcal{U}} + \langle Nv,w\rangle_{\mathcal{U}} + \langle Nw,v\rangle_{\mathcal{U}}\right)dt. \quad \text{0.5pt}$$

$$= \langle \mathcal{A}'w, Dy(v)\rangle_H - \langle \mathcal{A}'w, y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt.$$ D'où le résultat :

$$\langle J'(v), w\rangle = \langle \mathcal{A}'w, Dy(v) - y_d\rangle_H + \int_0^T\langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}}\, dt. \quad \text{0.5pt}$$

On rappelle ici que : Comme $Dy(v+\theta w) - Dy(v) = \mathcal{A}'(v+\theta w) + \mathcal{B}' - \mathcal{A}'v - \mathcal{B}' = \theta\mathcal{A}'w$

$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(Dy(v+\theta w) - Dy(v)\right) = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}(\theta\mathcal{A}'w) = \mathcal{A}'w$

<u>8b)</u> $\langle J'(v), w-v\rangle = \langle \mathcal{A}'(w-v), Dy(v)-y_d\rangle_H + \int_0^T\langle Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt.$

Comme $\mathcal{A}'(w-v) = \mathcal{A}'w - \mathcal{A}'v = (\mathcal{A}'w + \mathcal{B}') - (\mathcal{A}'v + \mathcal{B}') = Dy(w) - Dy(v)$ 1pt

alors $\langle J'(v), w-v\rangle = \langle Dy(w) - Dy(v), Dy(v) - y_d\rangle_H + \int_0^T \langle Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$

et on obtient le résultat demandé par symétrie du prod. scalaire ds H.

<u>8c)</u> D'après <u>8b)</u> $\langle J'(w), w-v\rangle = \langle Dy(w) - Dy(v), Dy(w) - y_d\rangle_H + \int_0^T\langle Nw, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$

Ce qui entraîne que $\langle J'(v) - J'(w), v-w\rangle = \langle J'(w) - J'(v), w-v\rangle$

$$= \langle Dy(w)-Dy(v), Dy(w)-y_d\rangle_H + \int_0^T\langle Nw, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt - \langle Dy(w)-Dy(v), Dy(v)-y_d\rangle_H - \int_0^T\langle Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt$$

$$= \langle Dy(w)-Dy(v), Dy(w)-y_d-Dy(v)+y_d\rangle_H + \int_0^T\langle Nw-Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt \quad \text{1pt}$$

$$= \langle Dy(w)-Dy(v), Dy(w)-Dy(v)\rangle_H + \int_0^T\langle N(w-v), w-v\rangle_{\mathcal{U}}\, dt = |Dy(w)-Dy(v)|^2_H +$$

$$\int_0^T\langle N(w-v), w-v\rangle\, dt \geqslant \alpha_N\int_0^T\|w-v\|^2_{\mathcal{U}}\, dt \geqslant 0 \quad \forall v,w\in L^2(0,T;\mathcal{U}) \quad \text{1pt}$$

$\Longrightarrow J$ convexe sur $L^2(0,T;\mathcal{U})$

<u>8d)</u> J est même strict. convexe car J' strictement monotone puisque

$\langle J'(w) - J'(v), w-v\rangle \geqslant \alpha_N\int_0^T\|w-v\|^2_{\mathcal{U}}\, dt > 0$ $\forall v,w\in L^2(0,T;\mathcal{U})$ t.q. $v\neq w$

1pt

9) $\mathcal{U}_{ad}$ partie convexe fermée de $L^2(0,T;\mathcal{U})$. On a donc montré que J était convexe ^0.25^ et continue $\overset{0.25}{\Rightarrow}$ J s.c.i faiblement et, de plus, J est coercive ^0.25^ ($\Rightarrow J$ infinie à l'∞), ce qui permet de prouver que le pb de minimisation $\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ admet au moins une solution optimale $u \in \mathcal{U}_{ad}$.
De plus, J est même strictement convexe ^0.25^ $\Rightarrow$ la sol. optimale u est unique.

10) Par rapport au contrôle optimal u, la solution $y(u)$ de $[1_u]$ s'écrit :

$$[1_u] \begin{cases} \dfrac{\partial y(u)}{\partial t} + A y(u) = f + Bu \quad \text{ds }]0,T[. \quad y(u) \in L^2(0,T;V) \\ y(0,u) = y_0 \end{cases}$$

On multiplie alors l'équation ds $[1_u]$ par $\varphi \in V$ ds le produit scalaire de la dualité V', V et on obtient : $\left\langle \dfrac{\partial y(u)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{V',V} + \langle A y(u), \varphi \rangle_{V',V} = \langle f + Bu, \varphi \rangle_{V',V}$ ds $]0,T[$

0.5 pt

Ce qui permet d'écrire

$$[2_u] \begin{cases} y(u) \in L^2(0,T;V) \\ \left\langle \dfrac{\partial y(u)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{V',V} + a(y(u),\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{V',V} + \langle Bu, \varphi \rangle_{V',V} \quad \text{ds }]0,T[\quad \forall \varphi \in V. \end{cases}$$

où $a(y(u),\varphi) = \langle A y(u), \varphi \rangle_{V',V}$ 0.5 pt

11) L'inéquation d'Euler associée au pb d'optimisation : $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$
est : $\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$

c.à.d. $\langle Dy(u) - y_d, Dy(v) - Dy(u) \rangle_H + \int_0^T \langle Nu, v-u \rangle_{\mathcal{U}} \, dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

0.5 pt 0.5 pt