Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Décembre 2022.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

Epreuve de contrôle continu
(2heures)

Problème

Ω étant un ouvert borné connexe et régulier ($\Gamma = \partial\Omega$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux) de $\mathbb{R}^n$, on considère alors le système elliptique suivant :

$$(1)\begin{cases} -k\Delta y + \vec{\omega}.\nabla y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Hypothèses : $f \in L^2(\Omega)$, v (fonction de contrôle) $\in \mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et $y \in V = H_0^1(\Omega)$. Le pb (1) admet une solution unique $y(v)$ (état du syst.) dans V et cette solution dépend continûment des données f et v :
$\exists C > 0 \,/\, \|y(v)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right)$.

Le champ de vitesse $\vec{\omega}$ est supposé constant et de faible intensité :
$\|\vec{\omega}\|_\infty << 1$ avec $\|\vec{\omega}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \omega_i$ où $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ $\forall i = 1, \dots, n$ $(\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T)$

1) De quel type de contrôle il s'agit dans (1) ? (1pt)

2) Montrer qu'en fonction de v, y est une application affine c.à.d. que l'on peut écrire $y(v) = Av + B$ où A est une application linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $B \in H_0^1(\Omega)$. (2pts)

Indication : On peut écrire l'E.D.P. ds (1) sous la forme : $(-k\Delta + \vec{\omega}.\nabla)y(v) = f + v$ ds Ω $(y(v) \in H_0^1(\Omega))$ et se rappeler (sans le démontrer) que l'opérateur $(-k\Delta + \vec{\omega}.\nabla)$ est lin. inversible sur $H_0^1(\Omega)$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

3) Montrer également que y est continue par rapport à v de $L^2(\Omega)$ ds $H_0^1(\Omega)$ (2pts)
Indication : Comme $y(v) = Av + B$, il suffit de montrer que l'application linéaire A est continue par rapport à v.

On introduit la fonction coût : $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx$ où $z_d \in L^2(\Omega)$ (c'est l'état désiré) et $N > 0$.

4) Etude de la convexité de J

4a) J étant G-dérivable, calculer $\langle J'(v), w\rangle \overset{\text{déf}}{=} \lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\left(J(v+\theta w) - J(v)\right)$ et montrer que $\langle J'(v), w\rangle = \int_\Omega (y(v) - z_d) Aw\, dx + N\int_\Omega vw\, dx$ (2pts)
où A est l'application linéaire qui apparaît ds l'expression de $y(v) = Av + B$.

Indication : On pourra utiliser les résultats suivants sans les démontrer :

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{2\theta}\left(y^2(v+\theta w) - y^2(v)\right) = \left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{\theta}\left(y(v+\theta w) - y(v)\right)\right)\left(\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{2}\left(y(v+\theta w) + y(v)\right)\right)$$
$$= \langle y'(v), w\rangle\, y(v).$$

.../...

et aussi: $\lim_{\theta \to 0^+} \left(\frac{1}{\theta} \left(y(v+\theta w) - y(v) \right) z_d \right) = \langle y'(v), w \rangle z_d$

4b) En déduire que $\langle J'(v), v-w \rangle = \int_\Omega (y(v) - z_d)(y(v) - y(w))\,dx + N \int_\Omega v(v-w)\,dx$.

Indication: $A(v-w) = Av + B - Aw - B = y(v) - y(w)$. (1pt)

4c) En déduire aussi l'expression de $\langle J'(w), v-w \rangle$. (1pt)

4d) Montrer alors que J est convexe en montrant que J' est monotone c.à.d. $\langle J'(v) - J'(w), v-w \rangle \geq 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega)$. (2pts)

4e) Montrer aussi que J est même strictement convexe à partir de la stricte monotonie de J': $\langle J'(v) - J'(w), v-w \rangle > 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega)$ t.q. $v \neq w$. (1pt)

5) Montrer, à présent, que J est continue sur $L^2(\Omega)$. (2pts)

Indication: Remarquer que J est construite à partir de carrés de normes qui sont des fonctions continues.

6) Vérifier alors que J est s.c.i faiblement sur $L^2(\Omega)$. (1pt)

7) Montrer que J est coercive sur $L^2(\Omega)$ c.à.d. montrer qu'il existe $\alpha_J > 0 \;/\; J(v) \geq \alpha_J \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ où α_J à préciser. (1pt)

8) U_{ad} étant un convexe fermé (pas forcément borné) de $L^2(\Omega)$, montrer alors qu'il existe un unique $u \in U_{ad}$ t.q. (P): $J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v)$ (2pts)

9) Montrer que le contrôle optimal u ($u \in U_{ad}$) est caractérisé par l'équation variationnelle: $a(y(u), \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$ où la forme bilinéaire "a" est à préciser. Montrer également que u est aussi caractérisé par l'inéquation d'Euler:

$$\langle J'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$ (2pts)

où l'expression de $\langle J'(u), v-u \rangle$ est à préciser aussi selon les calculs effectués précédemment (dans la question 4c) par exple).

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Décembre 2022.
Contrôle optimal_EDP (Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

<u>Problème</u>

$$(1)\begin{cases} -k\Delta y+\vec{\omega}\cdot\nabla y = f+v & \text{ds } \Omega \underset{\text{ouv}}{\subseteq}\mathbb{R}^n \quad f\in L^2(\Omega),\ v\in \mathcal{U}_{ad}\underset{\text{conv. fermé}}{\subset} L^2(\Omega),\ y(v)\in V=H_0^1(\Omega) \\ y=0 & \text{sur } \Gamma=\partial\Omega \ (\mathcal{C}^1\text{-par morceaux}). \end{cases}$$

Pour le reste des hypothèses voir sujet.

1) Dans (1), il s'agit d'un contrôle <u>distribué</u>. (1pt)

2) On montre ici que $y(v)=Av+B$ où $A: L^2(\Omega)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$, $v\longmapsto Av$ est linéaire et $B\in V$.

$y(v)$ vérifie (1) $\Rightarrow y(v)\in H_0^1(\Omega)$ et $(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)y=f+v \Rightarrow y(v)=(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}(f+v)$

c.à.d. $y(v)=(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}v+(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}f$ car l'opérateur $(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)$ est linéaire et inversible de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

On peut prendre alors comme opérateur lin. A, l'opérateur svt :

$$A: v\longmapsto Av=\begin{cases}(k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}v & \text{dans } \Omega\\ 0 & \text{sur } \Gamma\end{cases} \Rightarrow A \text{ est linéaire car } (-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla) \text{ lin.}$$

0.5pt 0.5pt

Par ailleurs, on pose $B=\begin{cases}(k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}f & \text{ds } \Omega\\ 0 & \text{sur } \Gamma\end{cases} \Rightarrow B\in V=H_0^1(\Omega)$ puisque $(-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}: L^2(\Omega)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ $\Rightarrow (-k\Delta+\vec{\omega}\cdot\nabla)^{-1}f\in H_0^1(\Omega)$ et $B=0$ sur Γ (0.5pt)

0.5pt

3) On montre, à présent, que l'application $v\mapsto y(v)$ est continue % à v : $y: L^2(\Omega)\longrightarrow H_0^1(\Omega)$

$$v\longmapsto y(v)=Av+B$$

Comme B ne dépend pas de v, il suffit donc de m.q. A est continue % à v, c.à.d. prouver l'existance de $C_A>0$ t.q. $\|Av\|_{H_0^1(\Omega)}\leq C_A\|v\|_{L^2(\Omega)}\ \forall v\in L^2(\Omega)$

Lorsque $B=0_{H_0^1(\Omega)}$ $(\Leftrightarrow f=0_{L^2(\Omega)})$ $y_{hom}(v)=Av$ est la solution unique de (1_{hom})

(1pt) dépendant continûment de la seule donnée $v\in L^2(\Omega)$: $\|y_{hom}(v)\|_{H_0^1(\Omega)}\leq C_{hom}\|v\|_{L^2(\Omega)}$

c.à.d. $\|Av\|_{H_0^1(\Omega)}\leq C_{hom}\|v\|_{L^2(\Omega)}\ \forall v\in L^2(\Omega)\Rightarrow C_A=C_{hom}$ et ainsi l'opérateur

(1pt) A est continu % à $v \Rightarrow y: v\mapsto y(v)$ continue % à v.

<u>Introduction de la fction coût</u> : $J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega (y(v)-z_d)^2dx+\frac{N}{2}\int_\Omega v^2dx$, $z_d\in L^2(\Omega)$, $N>0$.

4) <u>Convexité de J</u>

4a) $\langle J'(v),w\rangle=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(J(v+\theta w)-J(v)\right)$

$$=\lim_{\theta\to0^+}\left[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega\left(y(v+\theta w)-z_d\right)^2dx-\frac{1}{2\theta}\int_\Omega(y(v)-z_d)^2dx+\frac{N}{2\theta}\int_\Omega(v+\theta w)^2dx-\frac{N}{2\theta}\int_\Omega v^2dx\right]$$

(0,5pt)

$$=\lim_{\theta\to0^+}\left[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega\left(y^2(v+\theta w)+\cancel{z_d^2}-2y(v+\theta w)z_d-y^2(v)-\cancel{z_d^2}+2y(v)z_d\right)dx+\frac{N}{2\theta}\int_\Omega\left(\cancel{v^2}+\theta^2w^2+2\theta vw-\cancel{v^2}\right)dx\right]$$

$$\Rightarrow \langle J'(v), w\rangle = \lim_{\theta\to 0^+}\left[\frac{1}{2\theta}\int_\Omega \left(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\right)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left(y(v+\theta w)-y(v)\right) z_d\, dx\right] + N\int_\Omega v w\, dx$$

0,5pt Indication de la quest. 4a)

$$= \int_\Omega \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{2\theta}\left(y^2(v+\theta w)-y^2(v)\right)dx - \int_\Omega \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(y(v+\theta w)-y(v)\right) z_d\, dx + N\int_\Omega v w\, dx$$

0,5pt

$$= \int_\Omega \langle y'(v), w\rangle\, y(v)\, dx - \int_\Omega \langle y'(v), w\rangle\, z_d\, dx + N\int_\Omega v w\, dx$$

$$= \int_\Omega (y(v)-z_d)\langle y'(v), w\rangle\, dx + N\int_\Omega v w\, dx$$

Comme $\langle y'(v), w\rangle := \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(y(v+\theta w)-y(v)\right) \overset{\text{Voir quest. 2)}}{=} \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\theta}\left(A(v+\theta w)+\cancel{B}-Av-\cancel{B}\right)$

0,5pt $= Aw$, on peut alors déduire l'expression de $\langle J'(v), w\rangle$:

$$\langle J'(v), w\rangle = \int_\Omega (y(v)-z_d)\, Aw\, dx + N\int_\Omega v w\, dx$$

4b) $\langle J'(v), v-w\rangle = \int_\Omega (y(v)-z_d)\, A(v-w)\, dx + N\int_\Omega v(v-w)\, dx$

1pt $= \int_\Omega (y(v)-z_d)(y(v)-y(w))\, dx + N\int_\Omega v(v-w)\, dx$ Indication de 4 b)

4c) $\langle J'(w), v-w\rangle = \int_\Omega (y(w)-z_d)(y(v)-y(w))\, dx + N\int_\Omega w(v-w)\, dx$ 1pt

4d) $\langle J'(v)-J'(w), v-w\rangle = \int_\Omega (y(v)-z_d)(y(v)-y(w))\, dx - \int_\Omega (y(w)-z_d)(y(v)-y(w))\, dx$

$+ N\int_\Omega v(v-w)\, dx - N\int_\Omega w(v-w)\, dx$ 1pt

$= \int_\Omega \left(y(v)-\cancel{z_d}-y(w)+\cancel{z_d}\right)(y(v)-y(w))\, dx + N\int_\Omega (v-w)(v-w)\, dx$

1pt $= \int_\Omega (y(v)-y(w))^2 dx + N\int_\Omega (v-w)^2 dx \geq 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega)$, $N>0$

J' est donc monotone $\Rightarrow J$ convexe sur $L^2(\Omega)$.

4e) J est même strictement convexe puisque J' est strictement monotone :
En effet $\langle J'(v)-J'(w), v-w\rangle \geq N\int_\Omega (v-w)^2 dx = N\|v-w\|^2_{L^2(\Omega)} > 0 \quad \forall v, w \in L^2(\Omega)\ v\neq w$.

5) Continuité de J

J est continue par rapport à v puisque c'est la somme de deux fonctions composées de fonctions continues : $J(v) = \frac{1}{2}\|y(v)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$

1pt $v\mapsto y(v)$ continue % à v (Voir quest. 3)), $v\mapsto z_d$ constante % à $v \Rightarrow$ cont. % à v, $v\mapsto y(v)-z_d$ continue % à $v \Rightarrow v\mapsto \|y(v)-z_d\|^2$ continue % à v car la fction norme et la fction carré sont continues par rapport à leur argument et enfin

1pt la fction $v\mapsto \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ continue % à v car composée de la fction norme et de la fction carré.

6) J continue % à $v \Rightarrow J$ s.c.i fortement % à $v \Rightarrow J$ s.c.i faiblement % à v

0.5pt car J convexe. 0.5pt

7) Coercivité de J :

J coercive sur $L^2(\Omega)$ car, par construction, $J(v) \geq \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[\|v\|_{L^2(\Omega)}\to\infty]{} +\infty$

où $\alpha_J = \frac{N}{2}$ (constante de coercivité de J) 1pt

8) $\mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé (pas forcément borné) de $L^2(\Omega)$ et considérons le pb (P) de minimisation (sous contraintes) de J sur $\mathcal{U}_{ad}$: $\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)$.
Alors le pb (P) admet une solution optimale unique notée u (le contrôle optimal) car la fonctionnelle J est convexe, 0.5) s.c.i faiblement 0.5) et coercive (⇒ infinie à l'∞), ce qui assure l'existance de 0.5) u. De plus, J est strictement convexe 0.5) ce qui assure l'unicité de u.

9) Le contrôle optimal u correspond à la solution d'état direct $y(u)$ qui vérifie

$$(\mathcal{A})\begin{cases} -k\,\Delta y(u) + \vec{\omega}\cdot\nabla y(u) = f+u & \text{ds } \Omega \\ y(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad V = H_0^1(\Omega) \quad f, u \in L^2(\Omega) \supset \mathcal{U}_{ad}$$

On multiplie alors l'équation dans $(\mathcal{A})$ par $\varphi \in V = H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$ et on intègre sur Ω : $-k\int_\Omega \Delta y\,\varphi\,dx + \int_\Omega (\vec{\omega}\cdot\nabla y)\,\varphi\,dx = \int_\Omega (f+u)\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_\Omega u\varphi\,dx$
Utilisant la formule de Green et se rappelant que $\varphi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \varphi|_\Gamma = 0$, on obtiendra alors l'écriture sute : $a(y(u),\varphi) = \langle f,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}$
où $a(y(u),\varphi) = k\int_\Omega \nabla y(u)\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega (\vec{\omega}\cdot\nabla y(u))\,\varphi\,dx.$ (1pt)

Par ailleurs, u sol. optimale de (P) : $J(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v) \Longrightarrow$ u vérifie l'inéquation d'Euler $\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$. Or d'après 4c) et si on remplace w par u et on garde v à sa place, on obtiendra l'expression finale de l'inéquation d'Euler : $\int_\Omega (y(u)-z_d)(y(v)-y(u))\,dx + N\int_\Omega u(v-u)\,dx \geq 0 \ \forall v\in\mathcal{U}_{ad}$
1pt)