Université de Tlemcen, Faculté des Sciences , Département de Mathématiques , AU 2022 -2023

Module: Th.semigroupes, Master M2 biomaths, Examen final, durée 1h30.

Exercice1: 07 pts Soit A un opérateur linéaire borné, $A \in l\,(X)$, X un espace de Banach. On pose

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n A^n}{n!}$$

a) **04 pts** Montrer que $T(t)$ est un C^0semigroupe sur X.

Sol: Il est facile de voir que $T(0) = I$. Comme tA et sA commutent, il s'ensuit que

$$T(t+s) = T(t)T(s)$$

La relation

$$e^{tA}x - x = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n A^n x}{n!}$$

donne que la convergence est uniforme , et on obtient

$$\lim_{t\to 0}(e^{tA}x - x) = 0$$

b)Determiner son génerateur .

Sol: 03 pts On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{tA}x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}A^n x}{n!}$$

$$\lim_{t\to 0} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n A^{n+1}x}{(n+1)!} = Ax + \lim_{t\to 0} \sum_{n\geq 1} \frac{t^n A^{n+1}x}{(n+1)!} = Ax$$

Exercice2. 07 pts Soit $T(t) \in l\,(X)$ avec

$$T(0) = I_X$$
$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall\ t, s \geq 0$$

On pose

$$X_0 = \{x \in X : T(t)x \to x, \text{ qd } t \to 0\}$$

1) Montrer que X_0 est un sous espace vectoriel fermé.

Sol: 03 pts Soient $x \in X_0$, et $y \in X_0$, On a

$$T(t)\,(\alpha x + \beta y) = \alpha T(t)x + \beta T(t)y \to \alpha x + \beta y, \text{ qd } t \to 0$$

ceci implique $\alpha x + \beta y \in X_0$. Montrons que X_0 est fermé.En effet , on a

$$\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Remarquons que si$x_n \in X_0$ avec$x_n \to x$, alors pout t petit et n assez grand

$$\begin{aligned}\|T(t)x - x\| &\leq \|T(t)x - T(t)x_n\| + \|T(t)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq (M+1)\|x_n - x\| + \|T(t)x_n - x_n\| \leq (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ainsi

$$x \in X_0$$

2) Montrer que $T(t)X_0 \subset X_0$, $\forall\ t \geq 0$.
Sol: 02 pts Soit Soit $x \in X_0$, alors

$$T(h)T(t)x - T(t)x = T(t)\left[T(h)x - x\right] \to 0, \text{ qd } h \to 0$$

ceci montre que

$$T(t)x \in X_0$$

3) **02 pts** Montrer la réstriction de $T(t)$ à X_0 est un C^{0}semigroupe sur X_0.
Sol: facile.

Exercice 3.06 pts
Soit A un opérateur linéaire .On considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{c}\frac{du}{dt} = Au + F(u),\ \ t > 0 \\ u(0) = u_0\end{array}\right.$$

a) Donner des conditions suffisantes sur A et F pour que (S) admet une solution unique.
b) Justifier (a).
a) **Sol: 03 pts** il suffit que F soit Lipschitzienne et A engendre un C^0 semigroupe.
b) **03 pts** On considère l'opérateur

$$\Phi : C\left([0,b]\,; X\right) \to C\left([0,b]\,; X\right)$$

défini par

$$\Phi\left(u\right)\left(t\right) = T\left(t-s\right)u_0 + \int_0^t T\left(t-\tau\right)F\left(u\left(\tau\right)\right)d\tau$$

et on montre que pour b assez petit Φ réalise une contraction (voir le cours).