Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

Master 2 "Biomathématiques et Modélisation"
Module : TP Résolution numérique des EDP
Année Universitaire : 2022-2023

Éxamen Final

Exercice-01 (07 points)

On considère le problème elliptique suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u + xu & = & 5\lambda u \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial A \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial B \end{array}\right. \tag{1}$$

Avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

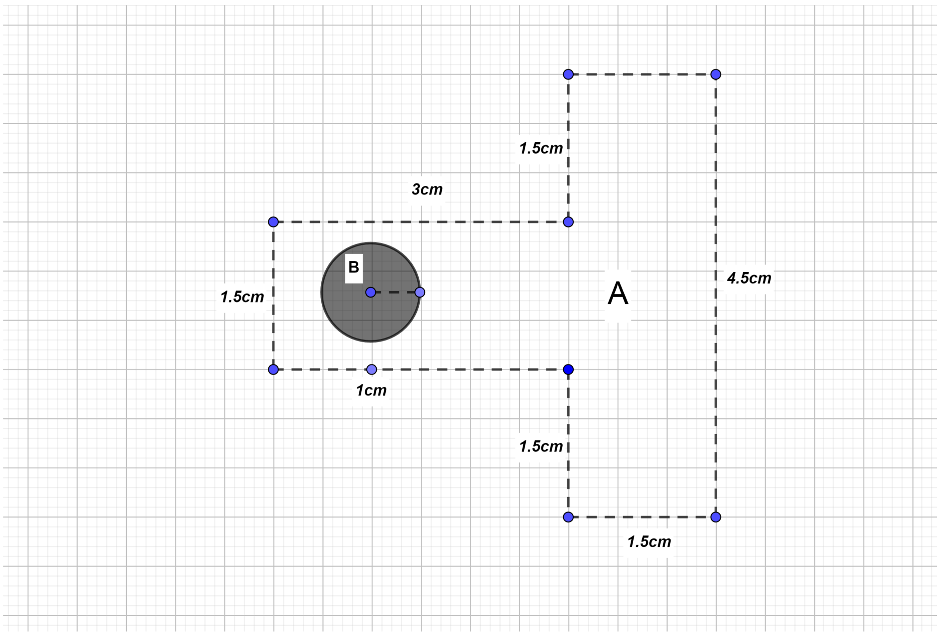

FIGURE 1 –

En utilisant **GUI** :

1. Dresser le domaine Ω, où $\Omega = A \setminus B$.**(02 points)**

2. Imposez les conditions aux limites de Neumann sur ∂A et celles de Dirichlet homogènes sur ∂B.**(01 point)**

3. Résolvez, et visualisez en 3D la solution du problème (1).**(02 points)**

4. Que se passe-t-il quand on résout $-\Delta u + xu = -10\lambda u$ à la place de $-\Delta u + xu = 5\lambda u$? Pourquoi les fonctions propres sont-elles identiques, alors que les valeurs propres sont toutes décalées **(02 points)**.

Exercice-02 (06 points)

On cherche une approximation de la solution $u : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ du problème suivant :

$$(P)\begin{cases} -u''(x) & + & c(x)u(x) = f(x) \\ u'(0) & = & a_0 \\ u'(1) & = & a_1 \end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions $f, c \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et c sont données de sorte qu'il existe une solution et une seule au problème. On suppose la solution u aussi régulière que nécessaire.

1. Donner le schéma aux différences.
2. Donner le graphe de la solution pour $f(x) = x^2, c(x) = x$.

Exercice-03 (07 points)

Dans le but de trouver une solution approchée du problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} u_t & = & \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x,y) & \text{dans} \quad \Omega_t \\ \frac{\partial u}{\partial n}(0,t) & = & 0,\ u(2,t) = 0 & t \in [0,+\infty[. \end{cases} \tag{3}$$

Où $\Omega_t = [0,2] \times [2,4] \times [0,10[= \Omega \times [0,10[$.

Résoudre le problème (3) dans chacun des cas suivants :

1. $f(x,y) = x, u_0(x) = 2x$

   — Trouver la solution approchée a l'aide de la commande **pdepe**.**(03.5 points)**

2. $f(x,y) = y^2, u_0(x) = x + y$

   En utilisant **pdetool** où $(x,y) \in [0,2] \times [2,4]$ avec conditions aux bords de Dirichlet homogènes par rapport à x et celles de Neumann homogènes par rapport à y.**(03.5 points)**

Bon courage