Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2022-2023.

Master II "Biomathématiques et Modélisation"
Module : LaTeX
Durée : 1h30

Examen Final

On donne :

```
\begin{document}
\documentclass[11pt,a4paper]{report}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{amssymb}
\usepackage[english,main=french]{babel}
\usepackage[a4paper]{geometry}
\usepackage{amsmath,amsthm,amsopn,amstext,amscd,amsfonts,amssymb,latexsym,enumerate,gra
\geometry{vmargin=1cm,hmargin=1cm}
\thispagestyle{empty}
\def\Sum{\displaystyle\sum}
\newtheorem{Theorem}{Theorem}[section]
\newtheorem{Remark}[Theorem]{Remarque}
\newenvironment{Dem}{\noindent{\bf D\'{e}monstration}} {\rule{2mm}{2mm}\medskip}

...
\end{document}
```

Reproduire ce qui est encadré ci-dessous (attention à la mise en forme)

Résoudre ce qui suit :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} u_t & = & \Delta u + v^q + f & \text{in} & \Omega_T, \\ v_t & = & \Delta v + |\nabla u|^p + g & \text{in} & \Omega_T, \\ u = v & = & 0 & \text{on} & \Gamma_T, \\ u(x,0) & = & 0 & \text{in} & \Omega, \\ v(x,0) & = & 0 & \text{in} & \Omega, \\ u, v & \geq & 0 & \text{in} & \Omega_T. \end{array}\right. \tag{1}$$

On peut vérifier que, pour tout $(S, I) \in D \cap (D(A) \times D(A))$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_m(v) & = & \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{|v|^2}{|x|^{2s}} + \frac{1}{m}\|v\|^m_m - \frac{\lambda}{p}\|v\|^p_p \\ & \leq & \dfrac{1}{2}\liminf\limits_{k\to+\infty}\|v_k\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \dfrac{\mu}{2}\liminf\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{|v_k|^2}{|x|^{2s}} + \frac{1}{m}\lim\limits_{k\to+\infty}\inf\|v_k\|^m_m - \frac{\lambda}{p}\lim\limits_{k\to+\infty}\|v_k\|^p_p \\ & \leq & \liminf\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\|v_k\|^2_{H^s_0(\Omega)} - \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{|v_k|^2}{|x|^{2s}} + \frac{1}{m}\|v_k\|^m_m - \frac{\lambda}{p}\|v_k\|^p_p\right) \\ & = & \liminf\limits_{k\to+\infty}\mathcal{I}_m(v_k) \end{array}$$

Exercice 01.

Exemple des images dans un Tableau

Le logiciel LaTeX présente

1. *des avantages :*
   (a) il est gratuit ;
   (b) il est libre ;
   (c) il existe sous
      i. Linux ;
      ii. Mac ;
      iii. **Windows** ;
      Avec plusieurs éditeurs :
      — TeXstudio
      — WinEdt
      — etc.
2. *des inconvénients* :
   + je ne vois pas ;
   + et vous ?

Matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercice 02.

Theorem 0.0.1. *(Inégalité de Hardy)*
Soit $1 < p < N$, *si* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *:*

— $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

— *L'inégalité de Hardy*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \leqslant C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \qquad \text{avec} \qquad C_{N,p} = \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \tag{2}$$

Theorem 0.0.2. *(Rellich-Kondrachov)*
Soit Ω *un domaine borné de classe* $\mathcal{C}^1$, *on a les injections compactes suivantes :*

— *Si* $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *avec* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

— *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$.

— *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Remarque 0.0.3. *Les injections précédentes sont vraies pour* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *seulement si* Ω *est borné. On peut utiliser les injections pour résoudre* (1).