Université Abou Bekr Belkaid 2022/2023
Département de Mathématiques
M1Statistiques et probabilités approfondies.
Module: Analyse numérique

Examen de rattrapage
Corrigé

On considère la résolution du problème à valeur initiale $y' = f(t, y)$
On suppose que la fonction f est suffisamment régulière.
Exercice 1 (8 points)
1. A partir d'un polynôme d'interpolation approprié obtenir la formule d'Adams suivante:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

Déterminer l'erreur de la méthode puis déduire l'ordre de consistance.
2. En utilisant la formule de Taylor au voisinage de t_n, déterminer une borne de l'erreur de troncature locale de la méthode suivante

$$y_{n+2} = y_n + 2hf\left(t_{n+1}, y_{n+1}\right).$$

Solution
1. **(4 points)**
On considère le polynôme d'interpolation passant par les trois points $(t_n, f_n), (t_{n+1}, f_{n+1})$ et (t_{n-1}, f_{n-1})

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{(t-t_{n+1})(t-t_{n-1})}{(t_n-t_{n+1})(t_n-t_{n-1})} f_n + \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}-t_{n-1})} f_{n+1} \\ & + \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(t_{n-1}-t_n)(t_{n-1}-t_{n+1})} f_{n-1} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} p(t) = & -\frac{(t-t_{n+1})(t-t_{n-1})}{h^2} f_n + \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{2h^2} f_{n+1} \\ & + \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{2h^2} f_{n-1} \end{aligned}$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_{n+1})(t-t_{n-1})\, dt = h^3 \int_0^2 s(s-2)\, ds = -\frac{4}{3}h^3$$

:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n-1})\, dt = h^3 \int_0^2 s(s-1)\, ds = \frac{2}{3}h^3$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n+1})\, dt = h^3 \int_0^2 (s-1)(s-2)\, ds = \frac{2}{3}h^3$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} p(t)dt = \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)$$

Maintenant pour l'erreur, on a:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left(f(t) - p(t)\right) dt = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{f'''(\xi(t))}{3!} \left(t - t_{n-1}\right)\left(t - t_{n+1}\right)\left(t - t_n\right) dt$$

Il s'en suit,

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left(f(t) - p(t)\right) dt\right| \\
\leq \;& \frac{M_3}{3!}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left|\left(t - t_{n-1}\right)\left(t - t_{n+1}\right)\left(t - t_n\right)\right| dt \\
\leq \;& \frac{M_3}{3!}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(t - t_{n-1}\right)\left(t - t_{n+1}\right)\left(t_n - t\right) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(t - t_{n-1}\right)\left(t - t_{n+1}\right)\left(t - t_n\right) dt\right) \\
\leq \;& \frac{M_3}{3!}h^4\left(\int_0^1 s\left(s-1\right)\left(s-2\right) ds - \int_1^2 s\left(s-1\right)\left(s-2\right) ds\right) \\
\leq \;& \frac{M_3}{12}h^4
\end{aligned}$$

Il en résulte que la méthode est **au moins** d'ordre 3.

2. **(4 points)**

L'erreur de troncature locale est:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h}\left(y\left(t_{n+2}\right) - y\left(t_n\right)\right) - 2f\left(t_{n+1}, y\left(t_{n+1}\right)\right)$$

En utilisant les développements de Taylor

$$y\left(t_{n+2}\right) = y\left(t_n\right) + 2hy'\left(t_n\right) + \frac{4h^2}{2}y''\left(t_n\right) + \frac{8h^3}{6}y'''\left(\xi_n^1\right), \xi_n^1 \in \left(t_n, t_{n+2}\right),$$

et

$$y'\left(t_{n+1}\right) = y'\left(t_n\right) + hy''\left(t_n\right) + \frac{h^2}{2}y'''\left(\xi_n^2\right), \xi_n^2 \in \left(t_n, t_{n+1}\right)$$

on a

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1}(h) &= \frac{1}{h}\left(y\left(t_n\right) + 2hy'\left(t_n\right) + 2h^2y''\left(t_n\right) + \frac{4h^3}{3}y'''\left(\xi_n^1\right) - y\left(t_n\right)\right) \\
& \quad -2\left(y'\left(t_n\right) + hy''\left(t_n\right) + \frac{h^2}{2}y'''\left(\xi_n^2\right)\right) \\
&= h^2\left(\frac{4}{3}y'''\left(\xi_n^1\right) - y'''\left(\xi_n^2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\tau_{n+1}(h)\right| &\leq \left|\frac{4}{3}y'''\left(\xi_n^1\right) - y'''\left(\xi_n^2\right)\right| h^2 \\ &\leq \left|\frac{4}{3}y'''\left(\xi_n^1\right)\right| + \left|y'''\left(\xi_n^2\right)\right| h^2 \\ &\leq \frac{7}{3}Mh^2\end{aligned}$$

où $M = \max_{t_n \leq t \leq t_{n+2}} \left|y'''(t)\right|$

Exercice 2 (6 points)
Montrer que la méthode multipas linéaire suivante

$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} - (2a+1)\,y_n = h\left[(a+2)\,f_{n+1} + af_n\right].$$

est d'ordre 2 en général.
Déduire qu'il existe un choix du paramètre a pour lequel la méthode est d'ordre 3 mais que cette méthode n'est pas convergente.
Solution
1. **(4 points)**
On a $\alpha_0 = -(2a+1), \alpha_1 = 2a, \alpha_2 = 1, \beta_0 = a$ et $\beta_1 = a+2$.
Vérifions l'ordre de consistance.
On a pour tout a

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i = -(2a+1) + 2a + 1 = 0$$

et

$$\sum_{i=0}^{2} i\alpha_i = 2a + 2 = a + a + 2 = \sum_{i=0}^{2} \beta_i.$$

De plus

$$\sum_{i=0}^{2} i^2\alpha_i = 2a + 4 = 2(a+2) = 2\sum_{i=0}^{2} i\beta_i.$$

et en général

$$\sum_{i=0}^{3} i^3\alpha_i = 2a + 8 \neq 3(a+2) = 3\sum_{i=0}^{3} i^2\beta_i.$$

Le schéma est donc consistant d'ordre 2.
Pour qu'il soit d'ordre 3 il faut

$$2a + 8 = 3(a+2)$$

ce qui implique

$$a = 2$$

le schéma est donc

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h\left[4f_{n+1} + 2f_n\right]$$

2. **(2 points)**
Vérifions la condition des racines.

$$\rho(z) = z^2 + 4z - 5 = (z-1)(z+5)$$

$z_1 = 1$ et $z_2 = 5$ sont les racines de $\rho(z)$.
$\rho(z)$ admet une racine de module $|z_2| = 5 > 1$, le schéma n'est pas stable, ce schéma n'est pas convergent.

Exercice 3 (7 points)
On considère la méthode de Runge-Kutta donnée par le tableau de Butcher suivant

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array} \tag{1}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature utilisées à chaque étape.
2. Ecrire explicitement et en détail le schéma associé au tableau de Butcher (1).
3. Montrer que la méthode est au moins d'ordre 2.
4. Déterminer la condition sur z pour décrire l'ensemble de stabilité absolue de la méthode.
5. L'ensemble précédent contient-il un point z avec $\mathrm{Re}(z) < 0$? Cet ensemble contient-il tous les points z tels que $\mathrm{Re}(z) < 0$?

Corrigé
1. Les points intermédiaires sont

$$t_{n,1} = t_n, t_{n,2} = t_n + \frac{h}{3} \text{ et}, t_{n,3} = t_n + \frac{2h}{3}$$

La formule de quadrature de f sur $[0,1]$ associée aux poids b_i est:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$$

Première étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(t)dt \approx \frac{1}{3}f(0)$$

Deuxième étape, la formule de quadrature de f sur $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ est:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(t)dt \approx \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$$

2.

$$\begin{aligned}
y_{n,1} &= y_n \\
y_{n,2} &= y_n + \frac{h}{3} f\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) \\
y_{n,3} &= y_n + \frac{2}{3} h f\left(t_{n,2}, y_{n,2}\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4} h f\left(t_{n,1}, y_{n,1}\right) + \frac{3}{4} h f\left(t_{n,3}, y_{n,3}\right)
\end{aligned}$$

La méthode proposée s'écrit:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2}{3} h k_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4} h \left(k_1 + 3k_3\right)
\end{aligned}$$

3. **ordre** ≥ 1

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

ordre ≥ 2 de plus on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

4. En prenant $f(t, y) = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, les équations définissant k_1, k_2 et k_3 s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{c}
k_1 = \lambda y_n \\
k_2 = \lambda \left(1 + \frac{\lambda h}{3}\right) y_n \\
k_3 = \lambda \left(\frac{2}{9} h^2 \lambda^2 + \frac{2}{3} h \lambda + 1\right) y_n
\end{array} \right.$$

De là, on déduit

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{\lambda}{4} h \left(\frac{6}{9} h^2 \lambda^2 + \frac{6}{3} h \lambda + 4\right) y_n \\
&= \left(1 + h\lambda + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^3 h^3}{6}\right) y_n
\end{aligned}$$

En posant $z = \lambda h = x + iy$ alors

$$y_n = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right)^n y_0$$

$$\text{La suite } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| < 1$$

La condition pour avoir la stabilité est donc

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| < 1$$

5. Soit $z = -1$ alors $\mathrm{Re}(z) < 0$ et

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

L'ensemble précédent contient au moins un point z avec $\mathrm{Re}(z) < 0$.
Mais il ne contient pas tous les points z tels que $\mathrm{Re}(z) < 0$, puisque
Pour $z = -3$

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right| = \left|1 - 3 + \frac{9}{2} - \frac{27}{6}\right| = 2 > 1.$$