Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2022-2023

Master 1 : Probabilités-Statistiques
Module : Théorie de l'intégration

Correction de l'examen final : Théorie de l'intégration

Exercice 1 (4 pts).
Soit E un ensemble, et soit $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ une mesure extérieure ; soit $\mathscr{M}(\mu^*)$ la tribu des parties μ^*-mesurables (au sens de Caratheodory).
1. Donner la définition d'une partie μ^*-mesurable.
2. Soit $A_1, A_2 \subset E$ tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Montrer que si $A_1 \in \mathscr{M}(\mu^*)$ ou $A_2 \in \mathscr{M}(\mu^*)$, alors

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

3. Soit $A \subset B \subset E$. Montrer que si $C \in \mathscr{M}(\mu^*)$ et satisfait $A \subset C$ et $\mu^*(A) = \mu^*(C)$, alors $\mu^*(B) = \mu^*(B \cup C)$.

Solution
1. On dit que $A \in \mathscr{P}(E)$ est μ^*-mesurable (au sens de Caratheodory) si

$$\forall B \in \mathscr{P}(E),\ \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A). \qquad \textbf{(1pt)}$$

2. Supposons que $A_1 \in \mathscr{M}(\mu^*)$ donc

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \setminus A_1).$$

Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors $(A_1 \cup A_2) \cap A_1 = A_1$ et $(A_1 \cup A_2) \setminus A_1 = A_2$. D'où le résultat. **(1.5 pt)**
3. Soit $A \subset B \subset E$. Si $C \in \mathscr{M}(\mu^*)$ alors

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cup C) &= \mu^*((C \cup B) \cap C) + \mu^*((C \cup B) \setminus C) \\ &= \mu^*(C) + \mu^*(B \setminus C), \qquad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

et

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap C) + \mu^*(B \setminus C) \ldots (1) \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Si $A \subset B$ et $A \subset C$ alors $A \subset B \cap C \subset C$ donc $\mu^*(A) \leq \mu^*(B \cap C) \leq \mu^*(C)$ et puisque $\mu^*(A) = \mu^*(C)$ on obtient $\mu^*(B \cap C) = \mu^*(C)$. D'où (1) s'écrit

$$\mu^*(B) = \mu^*(C) + \mu^*(B \setminus C). \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Ainsi $\mu^*(B) = \mu^*(B \cup C)$.

Exercice 2 (4 pts).
1. Rappeler le lemme de Fatou.
2. Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur E telle que $f_n \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$.
Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Solution

1. Lemme de Fatou :Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives sur E (à valeurs dans $[0, +\infty]$), alors

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

2. Si $\int_E f d\mu < +\infty$ alors d'après le TCD on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Si $\int_E f d\mu = +\infty$. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{1}$$

Or $\liminf_{n\to+\infty} f_n = f$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. **(0.5 pt)**

Donc (1) s'écrit

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu. \qquad \textbf{(0.5 pt)} \tag{2}$$

ce qui donne

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = +\infty \qquad \textbf{(0.5 pt)}.$$

Donc on a aussi $\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = +\infty$ **(0.5 pt)** (puisque $\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$) Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = +\infty = \int_E f d\mu. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 3 (4 pts).
*Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une suite de fonctions mesurables $(f_n)_n$ est **convergente en mesure** vers 0 si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 0$.*

1. En utilisant l'inégalité de Markov montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_E |f_n| d\mu = 0$, alors $(f_n)_n$ converge en mesure vers 0.

2. La réciproque est-elle vraie ? (considérer l'exemple où $E = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $f_n = n^2 \chi_{]0, \frac{1}{n}]}$).

Solution

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a d'après l'inégalité de Markov

$$\mu(\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n| d\mu. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ dans cette inégalité on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\}) = 0. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Donc $(f_n)_n$ converge en mesure vers 0.
2. La réciproque de 1. est fausse. En effet, soient $E = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $f_n = n^2 \chi_{]0,\frac{1}{n}]}$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\} = \begin{cases}]0, \frac{1}{n}] & si\ n^2 > \varepsilon \\ \emptyset & si\ n^2 \leq \varepsilon \end{cases} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

donc

$$\mu\left(\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = \begin{cases} \lambda\left(]0, \frac{1}{n}]\right) = \frac{1}{n} & si\ n^2 > \varepsilon \\ \lambda(\emptyset) = 0 & si\ n^2 \leq \varepsilon. \end{cases} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in E,\, |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$, et donc $(f_n)_n$ converge en mesure vers 0. **(0.5 pt)**
D'autre part,

$$\int_{[0,1]} |f_n| d\lambda = n^2 \lambda\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Donc $\int_{[0,1]} |f_n| d\lambda$ tend vers $+\infty$. **(0.5 pt)**

Exercice 4 (4 pts).
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)} dx.$$

Solution
Posons

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin(x/n)}{(1+nx)(1+x^2)}$$

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable (car continue sur $\mathbb{R}^+$). **(0.5 pt)**
- On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \dfrac{nx}{(1+nx)(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \mu - p.p\, dans\, \mathbb{R}^+. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

- On a pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{(1+nx)(1+x^2)}\right| \leq \frac{nx}{(1+nx)(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x), \qquad \textbf{(1 pt)}$$

car $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'intégrale généralisée de Riemann de g sur $\mathbb{R}^+$ est convergente (et absolument puisque la fonction g est positive), et puisque g est mesurable (car elle est continue) la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. **(0.5 pt)**
Donc, le théorème de convergence dominée s'applique et l'on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 5 (4 pts).
1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}dx$ *est convergente.*
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}dx.$$

Montrer que la fonction F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Calculer* $F'(t)$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$F'(t) = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \frac{2x\sin(xt)}{(x^2+1)^2}dx.$$

Solution
1. La fonction $x \mapsto f(t,x) = \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(xt)}{x(x^2+1)} = t$), donc elle est intégrable sur $[0,1]$ **0.5 pt**. Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, on a la majoration

$$|f(t,x)| = \left|\frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}\right| \leq \frac{1}{x^3}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty$, donc la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ **0.5 pt**, ainsi elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Posons

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)}dx.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\cos(xt)}{x^2+1}, \quad \textbf{0.5 pt}$$

et pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \frac{1}{x^2+1}. \quad \textbf{0.5 pt}$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, **0.5 pt** et en vertu du théorème de dérivabilité des fonctions définies par des intégrales, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt** et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1}dx. \qquad \textbf{0.5 pt}$$

3. Par intégration par parties, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1}dx = \left[\frac{\sin(xt)}{t(x^2+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x\sin(xt)}{t(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \frac{2x\sin(xt)}{(x^2+1)^2}dx. \qquad \textbf{0.5 pt} \end{aligned}$$