Université de Tlemcen — *Département de Mathématiques*
Master 1 Probabilités et Statistiques — *Janvier 2023*
Analyse Fonctionnelle 1 — *Examen Final* — *1H45*

Exercice 1:

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$.

On pose, $E_1 = (E, \|.\|_1)$ *et* $E_\infty = (E, \|.\|_\infty)$ *où*

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|\, dx \quad et \quad \|u\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u(x)|.$$

1. Soit l'application

$$A: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto A(u) = \int_0^1 xu(x)\, dx.$$

a. Montrer que $A \in E_1'$ *et* $A \in E_\infty'$, *où* H' *désigne le dual topologique de H.*

b. Calculer les normes de A; $\|A\|_{E_1'}$ *et* $\|A\|_{E_\infty'}$.

c. Vérifier que ces deux normes sont atteintes.

2. Soit l'application

$$B: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto B(u) = \int_0^1 \frac{u(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

a. Montrer que B est bien définie i.e. $B(u) \in \mathbb{R}, \ \forall u \in E$.

b. Montrer que B n'est pas continue.

Exercice 2:

Soit $H = L^2(]-1,1[)$ *l'espace de Hilbert muni de sa norme usuelle* $\|.\|_2$.

Soit $(e_n)_{n\ge 0}$ *une base hilbertienne de H.*

1. Montrer que la série

$$\sum_{n\ge 0} \frac{e_n}{n+1}$$

est convergente. On note v sa somme.

2. Calculer la norme de v; $\|v\|_2$.

Exercice 3:

1. Soit $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0, y \ge 0\}$ *et* $F: K_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positivement homogène.*

Montrer que si la fonction $f := F(.,1)$ *est convexe alors F est convexe.*

2. Soit $p \in]1,+\infty[$ *et* $G: K_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$G(x,y) = \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

a. Montrer que G est continue et positivement homogène.

b. Montrer que G est concave.

c. En déduire que pour tous $u, v \in L^p(\Omega,\mu)$

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Bon Courage

Barème: *Exercice 1: 7 pts* *Exercice 2: 6 pts* *Exercice 3: 7pts*

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Corrigé

Exercice 1:

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$.

On pose, $E_1 = (E, \|.\|_1)$ *et* $E_\infty = (E, \|.\|_\infty)$ *où*

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|\,dx \quad et \quad \|u\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u(x)|.$$

1. Soit l'application

$$A: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto A(u) = \int_0^1 xu(x)\,dx.$$

a. L'application A est évidemment linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

D'une part nous avons pour tout $u \in E_1$:

$$|A(u)| = \left|\int_0^1 xu(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |xu(x)|\,dx \le \int_0^1 |u(x)|\,dx = \|u\|_1. \quad (\mathbf{0,5\ pt})$$

Ce qui montre que A est continue sur E_1 *donc* $A \in E_1'$ *et* $\|A\|_{E_1'} \le 1$.

D'autre part, pour tout $u \in E_\infty$

$$|A(u)| = \left|\int_0^1 xu(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |xu(x)|\,dx \le \sup_{0\le x\le 1}|u(x)| \int_0^1 |x|\,dx = \frac{1}{2}\|u\|_\infty.$$

Ainsi A est continue sur E_∞ ; $A \in E_\infty'$ *et* $\|A\|_{E_\infty'} \le 1/2$. $(\mathbf{0,5\ pt})$

b. Calculons les normes de A;

$$\|A\|_{E_\infty'} = \sup_{\|u\|_\infty = 1} |A(u)| \le \frac{1}{2}$$

Pour $u \equiv 1$, *nous avons* $\|u\|_\infty = 1$ *et*

$$|A(u)| = \left|\int_0^1 xu(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 x\,dx\right| = \frac{1}{2}; \quad (\mathbf{1\ pt})$$

D'où $\|A\|_{E_\infty'} = 1/2$.

Pour l'autre norme $\|A\|_{E_1'}$ *; il n'est pas évident de trouver une fonction «en un seul bloc» qui réalisera le* $\sup$ *de* $|A(u)|$ *sur la boule unité de* E_1 *!*

Définissons alors $v \in E$ *comme suit*

$$v(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ 0 \le x \le \alpha \\ c(x-\alpha) & si\ \alpha \le x \le 1 \end{cases}$$

où les paramètres α *et c sont tels que;* $\|v\|_1 = 1$ *et* $|A(v)| = 1$.

En exploitant ces deux équations nous obtenons le système

$$\begin{cases} c(1-\alpha)^2 = 2 \\ c(\alpha^3 - 3\alpha + 2) = 6 \end{cases}$$

qui admet pour solutions réelles $\alpha = \sqrt[3]{2} - 1$, $c = 2\left(2 - \sqrt[3]{2}\right)^{-2}$.

Avec cette valeur de α $(0 < \alpha < 1)$ *et celle de c, nous avons bien* $\|v\|_1 = 1$ *et* $|A(v)| = 1$, *et donc* $\|A\|_{E_1'} = 1$. $(\mathbf{1\ pt})$

Remarquons que $[0{,}5\,;\ 1\,] \subset \operatorname{supp} v$. $(\alpha \cong 0{,}26$ *et* $c \cong 3{,}65)$.

c. D'après la question b. les deux normes sont atteintes. $(\mathbf{1\ pt})$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

2. Soit l'application

$$B : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto B(u) = \int_0^1 \frac{u(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

a. Montrons que B est bien définie sur E. Soit $u \in E$, l'intégrale définissant $B(u)$ est impropre en 0. Montrons alors que, pour tout $a > 0$ assez petit, l'intégrale

$$I(a) = \int_a^1 \frac{u(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

existe. Nous avons

$$|I(a)| \leq \int_a^1 \frac{|u(x)|}{\sqrt{x}}\,dx \leq \|u\|_\infty \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(1-\sqrt{a}\right)\|u\|_\infty$$
$$|B(u)| = \lim_{a\searrow 0}|I(a)| \leq 2\|u\|_\infty < \infty \quad (car\ u\ continue\ sur\ [0,1]).$$

En conséquence B est bien définie sur E. **(1 pt)**

b. Montrons que B n'est pas continue. **(2 pts)**

Remarquons d'abord que B est continue sur E_∞ puisque pour tout $u \in E_\infty$;

$$|B(u)| \leq 2\|u\|_\infty .$$

La question est de montrer que B n'est pas continue sur E_1.

Supposons par l'absurde que B est continue. Alors puisque $E = C([0,1],\mathbb{R})$ est dense dans dans $L = L^1([0,1])$, l'application linéaire B se prolongerait en une fonctionnelle linéaire continue et de façon unique à L, (Revoir votre cours, Théorème de prolongement par densité).

Notons B_1 ce prolongement. Alors $B_1(u)$ existerait pour tout $u \in L$.

Pour $u_1 \in L$ définie par $u_1(x) = 1/\sqrt{x}$, nous avons

$$|B_1(u_1)| \leq \|B_1\|_{L'}\|u_1\|_1 = 2\|B\|_{L'} < \infty$$

mais

$$B_1(u_1) = \int_0^1 \frac{u_1(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$$

Ce qui est absurde. Donc B n'est pas continue sur E_1.

Que peut-on en conclure ? L'espace E_1 n'est pas complet.

***Exercice 2*:**

L'espace de Hilbert $H = L^2(]-1,1[)$ étant muni de sa norme usuelle $\|.\|_2$.

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H.

1. Montrons la convergence de la série **(3 pts)**

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e_n}{n+1} .$$

D'après le théorème de Riesz-Fischer, cette série est convergente si et seulement si la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$$

est convergente.

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Celle-ci est une série de Riemann ($\alpha = 2$) *convergente, donc la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{e_n}{n+1}$ *converge.*
On note v *sa somme.*
2. Calculons la norme de v; $\|v\|_2$.
Nous avons d'après l'identité de Pythagore

$$\|v\|_2^2 = \left\| \lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{e_n}{n+1} \right\|_2^2 = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \left\| \sum_{n=0}^{k} \frac{e_n}{n+1} \right\|_2^2 = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où

$$\|v\|_2^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad et \quad \|v\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \quad \mathbf{(3\ pts)}$$

***Exercice 3*:**
1. Soit $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0\}$ *et* $F: K_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positivement homogène.*
Si la fonction $f := F(.,1)$ *est convexe (resp. concave) alors* F *est convexe (resp. concave) (Voir votre cours).* **(2 pts)**
2. Soit $p \in\,]1,+\infty[$ *et* $G: K_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$G(x,y) = \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

a. Montrons que G *est continue et positivement homogène.* **(0,5 pt + 0,5 pt)**

- *Soit* $(x,y) \in K_1$, h *et* k *deux réels tels que* $(x+h, y+k) \in K_1$.

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} G(x+h,y+k) = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \left((x+h)^{\frac{1}{p}} + (y+k)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)^p = G(x,y).$$

- *Soit* $(x,y) \in K_1$ *et* $\lambda > 0$,

$$G(\lambda(x,y)) = G(\lambda x, \lambda y) = \left((\lambda x)^{\frac{1}{p}} + (\lambda y)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\lambda^{\frac{1}{p}}\left(x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}\right)\right)^p = \lambda G(x,y).$$

b. Montrons que G *est concave.* **(2 pts)**
Il suffit de montrer que la fonction $g := G(.,1)$ *est concave.*
Nous avons pour tout $x \geq 0$, $g(x) = G(x,1) = \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$, $p > 1$.
La fonction g *est deux fois dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et nous avons*

$$g'(x) = \left(x^{-\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-1}, \qquad g''(x) = \frac{1-p}{p} x^{-\frac{1}{p}-1} \left(x^{-\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-2}.$$

Remarquons que $g''(x) < 0, \forall x \in\,]0,+\infty[$*, donc* g *est concave et par suite* G *l'est aussi.*
c. Concluons que pour tous $u, v \in L^p(\Omega,\mu)$

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de convexité à G*, et* $(x,y) = (|u|^p, |v|^p) = w$.

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Puisque G est continue, positivement homogène et concave alors

$$\int_\Omega G(w)\,d\mu \le G\left(\int_\Omega w\,d\mu\right) \qquad (*)$$

Nous avons

$$\int_\Omega G(w)\,d\mu = \int_\Omega G(|u|^p\ ,|v|^p)\,d\mu = \int_\Omega (|u|+|v|)^p\,d\mu = \||u|+|v|\|_p^p,$$

et

$$G\left(\int_\Omega w\,d\mu\right) = G\left(\int_\Omega |u|^p\,d\mu, \int_\Omega |v|^p\,d\mu\right) = \left(\left(\int_\Omega |u|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

$$G\left(\int_\Omega w\,d\mu\right) = \left(\|u\|_p + \|u\|_p\right)^p$$

D'où d'après $(*)$, $\||u|+|v|\|_p^p \le \left(\|u\|_p + \|u\|_p\right)^p$, *mais sachant que*

$$\int_\Omega (|u+v|)^p\,d\mu \le \int_\Omega (|u|+|v|)^p\,d\mu \quad i.e.\ \ \|u+v\|_p^p \le \||u|+|v|\|_p^p$$

nous déduisons que

$$\|u+v\|_p^p \le \left(\|u\|_p + \|u\|_p\right)^p$$

D'où

$$\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p. \quad \mathbf{(2\ pts)}$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz