**Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen**

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2022-2023

Master 1 : Probabilités-Statistiques
Module : Théorie de l'intégration

**Corrigé du contrôle continu : Théorie de l'intégration**

**Exercice 1 (8 pts).**
*Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie $N$ de $E$ est $\mu$-négligeable s'il existe $Z \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Z$ et $\mu(Z) = 0$. On désigne par $\mathcal{N}_\mu$ la famille des parties $\mu$-négligeables. On dit que $(E, \mathcal{F}, \mu)$ est complet ou que $\mathcal{F}$ est complète pour $\mu$ si et seulement si $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{F}$.*
*1.Montrer que la réunion $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ d'une suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties $\mu$-négligeables est encore $\mu$-négligeable.*
*2. On pose*

$$\mathcal{F}^\mu = \{X \subset E : \exists A, B \in \mathcal{F}, \text{ tels que } A \subset X \subset B \text{ et } \mu(B \setminus A) = 0\},$$

*et*

$$\mathcal{F}_\mu = \{B \cup N, B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

*Montrer que $\mathcal{F}^\mu$ et $\mathcal{F}_\mu$ sont des tribus contenant $\mathcal{F}$.*
*3. Montrer que $\mathcal{F}^\mu = \mathcal{F}_\mu$.*
*4. Soit l'application $\overline{\mu} : \mathcal{F}^\mu \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\overline{\mu}(X) = \mu(A) = \mu(B)$.*
*a. Montrer que $\overline{\mu}$ est bien définie et est une mesure sur $\mathcal{F}^\mu$ prolongeant $\mu$.*
*b. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{\mu}} = \mathcal{N}_\mu$, en déduire que l'espace $(E, \mathcal{F}^\mu, \overline{\mu})$ est complet.*

**Solution**
1. Soit $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties $\mu$-négligeables alors il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une partie $Z_n \in \mathcal{F}$ telle que

$$N_n \subset Z_n \text{ et } \mu(Z_n) = 0.$$

On en déduit que

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n,$$

où

$$\mu(Z) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Z_n) = 0.$$

Ce qui prouve que $N$ est $\mu$-négligeable. **(2 points)**
2. Montrons que $\mathcal{F}^\mu$ est une tribu contenant $\mathcal{F}$ **(1.5 points)**.
- On a $E \subset E \subset E$ et comme $E \in \mathcal{F}$ et $\mu(E \setminus E) = \mu(\emptyset) = 0$, on a $E \in \mathcal{F}^\mu$ ;
- Si $A \subset X \subset B$, par passage au complémentaire on a $B^c \subset X^c \subset A^c$ avec $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$. On a donc $A \in \mathcal{F}^\mu \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}^\mu$.
- Si $A_n \subset X_n \subset B_n$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
  Or

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A_n$$

  donc

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

  Ainsi $\mathcal{F}^\mu$ est stable par réunion dénombrable ;

De plus, si $A \in \mathcal{F}$ alors $A \subset A \subset A$, et $\mu(A \setminus A) = 0$ donc $A \in \mathcal{F}_\mu$ ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\mu$.

Maintenant, montrons que $\mathcal{F}_\mu$ est une tribu contenant $\mathcal{F}$. **(1.5 points)**

— Comme $E \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$ on a $E = E \cup \emptyset \in \mathcal{F}_\mu$ ;

— Montrons que si $A \in \mathcal{F}_\mu$, alors $A^c \in \mathcal{F}_\mu$. Soit

$$A = B \cup N \text{ où } B \in \mathcal{F} \text{ et } N \subset Z \in \mathcal{F} \text{ avec } \mu(Z) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
(B \cup N)^c &= (Z \cup Z^c) \cap (B \cup N)^c = (Z \cup Z^c) \cap (B^c \cap N^c), \\
&= (Z \cap B^c \cap N^c) \cup (Z^c \cap B^c \cap N^c) \\
&= (Z \cap B^c \cap N^c) \cup (Z \cup B \cup N)^c \\
&= (Z \cap B^c \cap N^c) \cup (Z \cup B)^c, \quad \text{car } N \subset Z,
\end{aligned}$$

et puisque

$$(Z \cup B)^c = Z^c \cap B^c \in \mathcal{F} \text{ et que } (Z \cap B^c \cap N^c) \subset Z \text{ avec } \mu(Z) = 0,$$

i.e., $(Z \cap B^c \cap N^c)$ et $\mu$-négligeable, on obtient que $(B \cup N)^c \in \mathcal{F}_\mu$.

— Soit $A_n = B_n \cup N_n \in \mathcal{F}_\mu$, $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{F}$ est une tribu alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$ et qu'une réunion dénombrable d'ensembles $\mu$-négligeables est $\mu$-négligeable (question 1), on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) \in \mathcal{F}_\mu,$$

ainsi $\mathcal{F}_\mu$ est stable par réunion dénombrable ;

De plus si $A \in \mathcal{F}$ alors $A = A \cup \emptyset \in \mathcal{F}_\mu$, ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\mu$.

3. Montrons que $\mathcal{F}^\mu = \mathcal{F}_\mu$. **(1 points)**

Soit alors $X \in \mathcal{F}^\mu$ et $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $A \subset X \subset B$, $\mu(B \setminus A) = 0$. En écrivant $X = A \cup (X \setminus A)$, puisque $A \in \mathcal{F}$ et $X \setminus A \subset B \setminus A$, on a $X \setminus A \in \mathcal{N}_\mu$, et donc $X \in \mathcal{F}_\mu$. Donc $\mathcal{F}^\mu \subset \mathcal{F}_\mu$.

Pour l'autre inclusion, Si $X \in \mathcal{F}_\mu$ alors $X = A \cup N$ où $A \in \mathcal{F}$ et $N \subset Z \in \mathcal{F}$ avec $\mu(Z) = 0$. On a

$$A \subset A \cup N \subset A \cup Z.$$

Si on pose $B = A \cup Z$, alors on a $A \subset X \subset B$. Puisque $A \in \mathcal{F}$ et $B = A \cup Z \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunion) et

$$\mu(B \setminus A) = \mu((A \cup Z) \setminus A) \leq \mu(Z) = 0,$$

on en déduit que $X \in \mathcal{F}^\mu$. Donc $\mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}^\mu$.

4. Soit l'application $\overline{\mu} : \mathcal{F}^\mu \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\overline{\mu}(X) = \mu(A) = \mu(B)$.

a. • Vérifions que $\overline{\mu}$ est bien définie, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de $A$ et $B$. **(1 point)**

Supposons que

$$A \subset X \subset B, \quad \mu(B \setminus A) = 0, \quad \text{avec } A, B \in \mathcal{F}$$

et

$$A' \subset X \subset B', \quad \mu(B' \setminus A') = 0, \quad \text{avec } A', B' \in \mathcal{F}.$$

Alors $A \subset B'$ donc $\mu(A) \leq \mu(B') = \mu(A')$. En répétant l'argument dans l'autre sens, on montre aussi que $\mu(A') \leq \mu(A)$, donc $\mu$ est bien définie.

• Vérifions que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\mathcal{F}^\mu$ prolongeant $\mu$. **(1 point)**

— Clairement $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset \in \mathcal{F}$. ;

— Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille disjointe d'éléments de $\mathcal{F}^\mu$, alors il existe deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{F}$ telles que $A_n \subset X_n \subset B_n$ et $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

On a donc

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 0} \overline{\mu}(X_n).$$

b. Montrons que $\mathcal{N}_{\overline{\mu}} = \mathcal{N}_\mu$, **(bonus 1 point)**

Soit $N \in \mathcal{N}_{\overline{\mu}}$. Soit $Z \in \mathcal{F}^\mu$ tel que $N \subset Z$ et $\overline{\mu}(Z) = 0$. Comme $Z \in \mathcal{F}^\mu$ alors il existe $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ tel que $Z_1 \subset Z \subset Z_2$ et $\mu(Z_2 \setminus Z_1) = 0$.

On a $0 = \overline{\mu}(Z) = \mu(Z_1) = \mu(Z_2)$, ainsi on obtient $N \subset Z_2$ avec $Z_2 \in \mathcal{F}$ et $\mu(Z_2) = 0$. Donc $N \in \mathcal{N}_\mu$. ainsi $\mathcal{N}_{\overline{\mu}} \subset \mathcal{N}_\mu$.

Pour l'autre inclusion, soit $N \in \mathcal{N}_\mu$. Soit $Z \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Z$ et $\mu(Z) = 0$. Alors on a $\emptyset \subset N \subset Z$ et $\mu(Z \setminus \emptyset) = \mu(Z) = 0$ donc $N \in \mathcal{F}^\mu$ et $\overline{\mu}(N) = \mu(\emptyset) = \mu(Z) = 0$. Ainsi $N \in \mathcal{N}_{\overline{\mu}}$, d'où $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{N}_{\overline{\mu}}$.

Finalement, on a $\mathcal{N}_{\overline{\mu}} \subset \mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{F}^\mu$ ce qui montre que $(E, \mathcal{F}^\mu, \overline{\mu})$ est un espace mesuré complet. **(bonus 1 point)**

**Exercice 2** (**8 pts).**

*1. Rappeler la définition de* **la classe monotone** *sur un ensemble $E$.*

*2. Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et $\mu_1$, $\mu_2$ deux mesures sur $\mathcal{F}$.*

*Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(A) = \mu_2(A) < +\infty$. On pose*

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{F},\ \textit{tel que}\ \mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}.$$

*Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone sur $E$.*

**Solution**

1. Un sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \mathscr{P}(E)$ est appelé **une classe monotone** si :

i) $E \in \mathcal{M}$. **(1 point)**

ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$. **(1 point)**

iii) Si $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$. **(1 point)**

2. Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable, et $\mu_1$, $\mu_2$ deux mesures sur $\mathcal{F}$.
Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(A) = \mu_2(A) < +\infty$. On pose

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{F},\ \textit{tel que}\ \mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}.$$

Montrons que $\mathcal{M}$ est une classe monotone.

- $E \in \mathcal{M}$ car $E \in \mathcal{F}$ et $\mu_1(A \cap E) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \mu_2(A \cap E)$. **(1 point)**
- Soit $B, C \in \mathcal{M}$ tels que $B \subset C$, montrons que $C \setminus B \in \mathcal{M}$.

On remarque d'abord que $C \setminus B = C \cap B^c \in \mathcal{F}$ par stabilité de $\mathcal{F}$ par passage au complémentaire et par intersection.

Puis, on a $A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$, et comme $\mu_1(A) < +\infty$ et $\mu_2(A) < +\infty$ on a aussi $\mu_1(A \cap C) < +\infty$ et $\mu_2(A \cap C) < +\infty$ et donc

$$\mu_1((A \cap C) \setminus (A \cap B)) = \mu_1(A \cap C) - \mu_1(A \cap B),$$

$$\mu_2((A\cap C)\setminus(A\cap B)) = \mu_2(A\cap C) - \mu_2(A\cap B).$$

Comme $B, C \in \mathcal{M}$, on en déduit que

$$\mu_1((A\cap C)\setminus(A\cap B)) = \mu_2((A\cap C)\setminus(A\cap B)),$$

et donc

$$\mu_1(A\cap(C\setminus B)) = \mu_2(A\cap(C\setminus B)),$$

ainsi $C\setminus B \in \mathcal{M}$. **(2 points)**

- Soit $B_n \in \mathcal{M}$, $n\in\mathbb{N}$, tel que $B_n \subset B_{n+1}$. On veut montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$. On remarque d'abord que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$ (par stabilité de $\mathcal{F}$ par union dénombrable). Puis, comme $A\cap\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A\cap B_n)$ et que $(A\cap B_n)\subset(A\cap B_{n+1})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (i.e., la suite $(A\cap B_n)$ est croissante), on a par continuité croissante de $\mu_1$ et $\mu_2$

$$\mu_1\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A\cap B_n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu_1(A\cap B_n)$$

$$\mu_2\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A\cap B_n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu_2(A\cap B_n)$$

et puisque $\mu_1(A\cap B_n) = \mu_2(A\cap B_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient

$$\mu_1\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu_2\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

Donc $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M}$, ce qui montre la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrable croissante. **(2 points)**

**Exercice 3 (4 pts).**
*I. Rappeler la définition de* **la mesure extérieure** *sur un ensemble $E$.*
*II. Soit l'application $\mu^* : \mathscr{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu^*(\emptyset)=0$ et $\mu^*(A)=\infty$ si $A\neq\emptyset$. Montrer que $\mu^*$ est une mesure extérieure.*

**Solution**

I. Soit $E$ un ensemble. Une **mesure extérieure** sur $E$ est une application

$$\mu^* : \mathscr{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+$$

telle que

i) $\mu^*(\emptyset)=0$ ; **(0.5 point)**

ii) $\mu^*$ est croissante : si $A\subset B\subset E$, $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$ ; **(0.5 point)**

iii) $\mu^*$ est sous-$\sigma$-additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $E$,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(A_n). \qquad \textbf{(0.5point)}$$

II. Soit l'application $\mu^* : \mathscr{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu^*(\emptyset)=0$ et $\mu^*(A)=\infty$ si $A\neq\emptyset$.
Montrons que $\mu^*$ est une mesure extérieure.

i) On a $\mu^*(\emptyset)=0$ et ceci par définition de $\mu^*$. **(0.5 point)**

ii) $\mu^*$ est monotone ? **(1 point)**

Soient $A, B\in\mathscr{P}(E)$ tels que $A\subset B$. Montrons que $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$ ?

- Si $B=\emptyset$ alors $A=\emptyset$ donc $\mu^*(A)=0\leq 0=\mu^*(B)$.
- Si $B\neq\emptyset$, alors $\mu^*(B)=+\infty$, on a deux cas :
  - Si $A=\emptyset$ alors $\mu^*(A)=0\leq\mu^*(B)$.

- Si $A \neq \emptyset$ alors $\mu^*(A) = \mu^*(B) + \infty$.

Ainsi dans tous les cas on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

iii) $\mu^*$ est $\sigma$-sous-additive ? **(1 point)**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(E)$.

- Si $A_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $\mu^*(A_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ donc $\mu^*\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$, ainsi

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $A_{n_0} \neq \emptyset$, alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ ce qui donne $\mu^*\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = +\infty = \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Ainsi

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$