Université de Tlemcen — *Département de Mathématiques*
Master 1 Probabilités et Statistiques — *Novembre 2022*
Analyse Fonctionnelle 1 — *Examen Partiel* — *1H30*

Exercice 1:

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$, *muni de la norme de la convergence uniforme:* $\|u\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u(x)|$.

Soit F le sous-espace des fonctions polynômiales de E.

On considère l'application suivante,

$$A: F \longrightarrow F, \qquad u \longmapsto A(u) = u'.$$

1. Vérifier que A est un endomorphisme de F.

2. Montrer que A n'est pas continu.

Ind. : Utiliser une suite bornée de fonctions de F dont l'image par A ne l'est pas.

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 2:

1. Soit H un espace préhilbertien réel.

Rappeler les identités du parallélogramme et de polarisation.

2. Soit l'espace $E = L^1(]0,1[)$ *muni de sa norme naturelle*

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|\,dx.$$

a. Montrer, par un exemple, que deux éléments quelconques $u, v \in E$ *ne vérifient pas en général l'identité du parallélogramme.*

b. En déduire que la norme $\|.\|_1$ *ne dérive pas d'un produit scalaire.*

Exercice 3:

Soit $(e_n)_{n\ge 1}$ *une base hilbertienne d'un espace préhilbertien H.*

1. Montrer l'égalité de Parseval

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

2. En utilisant l'égalité de Parseval montrer que:

$$\forall u, v \in H, \qquad \langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, e_n\rangle\,\langle v, e_n\rangle.$$

Bon Courage

Barème: *Exercice 1: 7 pts* — *Exercice 2: 6 pts* — *Exercice 3: 7pts*

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Corrigé

Exercice 1:

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$*, muni de la norme de la convergence uniforme:* $\|u\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u(x)|$.

Soit F le sous-espace des fonctions polynômiales de E.

On considère l'application suivante,

$$A: F \longrightarrow F, \qquad u \longmapsto A(u) = u'.$$

1. Vérifions que A est un endomorphisme de F.

Il est clair que A est linéaire, et puisque la dérivée d'un polynôme est polynômiale alors A est un endomorphisme de F. (**2 pts**)

2. Montrons que A n'est pas continu. (**3 pts**)

Soit $u_n(x) = x^n,\ 0 \le x \le 1,\ n \ge 1$. *La suite* $(u_n)_n$ *est bornée dans F. En effet,* $\forall n \ge 1$

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u_n(x)| = \sup_{0\le x\le 1}|x^n| = 1.$$

D'autre part

$$A(u_n)(x) = u_n'(x) = n\, x^{n-1}$$

et $\|A(u_n)\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|u_n'(x)| = \sup_{0\le x\le 1}|n\, x^{n-1}| = n \sup_{0\le x\le 1}|x^{n-1}| = n.$

Si A était continu, il existerait une constante positive C telle

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|A(u_n)\|_\infty \le C\|u_n\|_\infty$$

i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \le C.$$

Ce qui est faux. Donc A n'est pas continu.

3. Conclusion: L'espace $(F, \|.\|_\infty)$ *n'est pas un espace de Banach.* (**2 pts**)

D'ailleurs on peut montrer de façon directe qu'il n'est pas complet !

Exercice 2:

1. Soit H un espace préhilbertien réel.

Rappelons les identités du parallélogramme et de polarisation. (**2 pts**)

- $\forall u, v \in H,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$
- $\forall u, v \in H,\ 4\langle u, v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2.$

2. Soit l'espace $E = L^1(]0,1[)$ *muni de sa norme naturelle*

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)|\, dx.$$

a. Montrons que deux éléments quelconques $u, v \in E$ *ne vérifient pas en général l'identité du parallélogramme.* (**3 pts**) *Soit u et v deux éléments de E définis par*

$$u \equiv 2 \ sur \ \left]0,\frac{1}{2}\right[\ et \ u \equiv 0 \ sur \ \left]\frac{1}{2},1\right[\quad , \qquad v \equiv 0 \ sur \ \left]0,\frac{1}{2}\right[\ et \ v \equiv 1 \ sur \ \left]\frac{1}{2},1\right[.$$

Nous avons,

$$\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2 = \left(\int_0^{1/2} 2\, dx + \int_{1/2}^1 dx\right)^2 = \frac{9}{4}, \qquad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \frac{9}{2}.$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

$$\|u\|^2+\|v\|^2=\left(\int_0^{1/2}2\,dx\right)^2+\left(\int_{1/2}^{1}dx\right)^2=\frac{5}{4}\,,\ \|u+v\|^2+\|u-v\|^2>2(\|u\|^2+\|v\|^2).$$

b. Pour la norme $\|.\|_1$ l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée, donc cette norme ne dérive pas d'un produit scalaire et l'espace $(L^1(]0,1[),\|.\|_1)$ n'est pas un espace de Hilbert. **(1 pt)**

***Exercice 3*:**

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne d'un espace préhilbertien H.

1. Pour l'égalité de Parseval **(3 pts)**

$$\|u\|^2=\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2$$

consultez votre le cours.

2. En utilisant l'égalité de Parseval montrons que: **(4 pts)**

$$\forall u,v\in H,\qquad \langle u,v\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle.$$

D'après l'identité de polarisation, nous avons

$$4\langle u,v\rangle=\|u+v\|^2-\|u-v\|^2$$

d'où, de l'égalité de Parseval nous écrivons

$$4\langle u,v\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle u+v,e_n\rangle|^2-\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle u-v,e_n\rangle|^2.\qquad (*)$$

Pour tout entier $k\geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{k}|\langle u+v,e_n\rangle|^2-\sum_{n=1}^{k}|\langle u-v,e_n\rangle|^2=\sum_{n=1}^{k}|\langle u,e_n\rangle+\langle v,e_n\rangle|^2-\sum_{n=1}^{k}|\langle u,e_n\rangle-\langle v,e_n\rangle|^2$$

$$=\sum_{n=1}^{k}|\langle u,e_n\rangle|^2+2\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle+|\langle v,e_n\rangle|^2-|\langle u,e_n\rangle|^2+2\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle-|\langle v,e_n\rangle|^2$$

$$=4\sum_{n=1}^{k}\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{k}|\langle u+v,e_n\rangle|^2-\sum_{n=1}^{k}|\langle u-v,e_n\rangle|^2=4\sum_{n=1}^{k}\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, nous obtenons de $(*)$

$$4\langle u,v\rangle=4\sum_{n=1}^{\infty}\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle$$

d'où

$$\langle u,v\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle u,e_n\rangle\langle v,e_n\rangle.$$