Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 2.
Module : *Théorie Spectrale* - Épreuve de Rattrapage.
Mardi 13/06/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (10pts)

1. Soient A et B deux matrices carrées réelles ou complexes d'ordre n, qui ne commutent pas i.e, $AB \neq BA$. Montrer que AB et BA ont le même spectre (les mêmes valeurs propres). (Indication : On peut commencer par le cas où A, ou bien B, est inversible ; puis utiliser la densité de l'ensemble des matrices inversibles dans l'espace de toutes les matrices carrées.)
2. On veut généraliser ce résultat à la dimension infinie. On prend deux opérateurs linéaires bornés A et B dans un espace de Banach E de dimension infinie, et qui ne commutent pas ($AB \neq BA$). On fait l'hypothèse que par exemple A est inversible. Montrer alors que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Exercice 2 : (10pts) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ muni de son produit scalaire habituel. On définit l'opérateur linéaire suivant

$$(Tx)(t) = i\,x'(t) + \int_0^1 x(s)\,ds$$

sur le domaine $D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$.

1. Montrer que T est non-borné. (Indication : on pourra utiliser les fonctions $u_n(t) = \sin(n\pi t)$ avec les entiers $n \geq 1$.)
2. Montrer que T admet un adjoint T^*, puis calculer cet adjoint.
3. Déterminer les spectres ponctuels de T et T^*.
4. En déduire les spectre de T.

1ère année de Master EDP - Semestre 2 - Année 2022/2023.

Module : « Théorie Spectrale » - Epreuve de Rattrapage - Corrigé.

Exercice 1 : (10pts)

1°/ $A, B \in \mathcal{M}(n)$: espace des matrices carrées d'ordre n. $AB \neq BA$.

Pour montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres, il suffit de montrer qu'elles ont le même polynome caractéristique.

* Supposons que A^{-1} existe : alors

$$P_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I - AB) = \det[A(\lambda A^{-1} - B)]$$
$$= (\det A)(\det(\lambda A^{-1} - B))$$ 3pts
$$= \det[(\lambda A^{-1} - B)A] = \det(\lambda I - BA) = P_{BA}(\lambda).$$

* Soit maintenant A non nécessairement inversible. Alors il existe une suite de matrices (A_k) inversibles telles que $\lim_{k \to +\infty} A_k = A$. Or $P_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I - AB)$ est continue par rapport à A (c'est une fonction polynômiale de A). Donc $P_{AB}(\lambda) = \lim_{k \to +\infty} P_{A_k B}(\lambda)$ 2pts

$$= \lim_{k \to +\infty} P_{BA_k}(\lambda) \text{ (d'après ce qui précède)}.$$
$$= P_{BA}(\lambda).$$

2°/ Pour montrer que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$, il suffit que $\rho(AB) = \rho(BA)$, les ensembles résolvants. Soit $\lambda \in \rho(AB)$. Alors $(\lambda I - AB)^{-1}$ existe. Comme A est inversible, alors $(\lambda I - AB)^{-1} = (\lambda A^{-1} - B)^{-1} A^{-1}$. 5pts

Maintenant, $A^{-1}(\lambda A^{-1} - B)^{-1}$ étant inversible, car A^{-1} et $(\lambda A^{-1} - B)^{-1}$ le sont, alors $A^{-1}(\lambda A^{-1} - B)^{-1} = [(\lambda A^{-1} - B)A]^{-1} = (\lambda I - BA)^{-1}$, d'où $\lambda \in \rho(BA)$. Et inversement.

Exercice 2 : (10pts) $(Tx)(t) = i\,x'(t) + \int_0^1 x(s)\,ds$, $x \in H = L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$

de domaine $D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$.

1°/ T est non-borné : Considérons $u_n(t) = \sin(n\pi t)$, $n \geq 1$.

$$\|u_n\|_H^2 = \int_0^1 (\sin(n\pi t))^2\,dt = \int_0^1 \frac{1-\cos 2n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

D'autre part : $(Tu_n)(t) = (i n\pi)\cos(n\pi t) + \left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1$

$$= (i n\pi)\cos(n\pi t) + \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \quad (\cos n\pi = (-1)^n).$$

et donc $\|Tu_n\|^2 = \left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]^2 + n^2\pi^2 \underbrace{\int_0^1 \cos^2(n\pi t)\,dt}_{=1/2}$

$$= \left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]^2 + \frac{n^2\pi^2}{2}$$

d'où $\frac{\|Tu_n\|^2}{\|u_n\|^2} = 2\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]^2 + n^2\pi^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. cqfd.

2°/ l'adjoint : On a $\mathcal{D}([0,1]) = C_0^\infty([0,1]) \subset W_0^{1,2}([0,1])$ et $C_0^\infty([0,1])$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$. Donc $\overline{D(T)} = H$ ce qui assure l'existence de T^*.

Maintenant $\langle Tx, y\rangle = i\int_0^1 x'(t)\bar{y}(t)\,dt + \left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)\left(\int_0^1 \bar{y}(t)\,dt\right)$

$$= i\,[\underbrace{x(1)}_{0}\bar{y}(1) - \underbrace{x(0)}_{0}\bar{y}(0)] - i\int_0^1 x(t)\bar{y}'(t)\,dt + \left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)\left(\int_0^1 \bar{y}(t)\,dt\right)$$

Sous l'hypothèse que $y \in W^{1,2}([0,1])$

D'où $\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 x(t)\left(\overline{i y'(t)}\right)dt + \int_0^1 \left(\int_0^1 \bar{y}(t)\,dt\right) x(s)\,ds$. 2pts

càd $(T^*y)(t) = i\,y'(t) + \int_0^1 y(t)\,dt$. La même expression que T

Donc $\boxed{D(T^*) = W^{1,2}([0,1]) \text{ et sur } D(T),\ T^* = T}$.

2pts

3°/ Les spectres ponctuels : Comme T est symétrique (et non-auto-adjoint) alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \sigma_p(T)$. Alors il existerait $x \not\equiv 0$ tq $Tx = \lambda x$. Posons $C_x = \int_0^1 x(s)\,ds$.

Alors $\lambda x(t) = i x'(t) + C_x \iff x'(t) + i\lambda x(t) = iC_x$

$$\Rightarrow \left(e^{i\lambda t} x(t)\right)' = i C_x e^{i\lambda t}.$$

$\boxed{1^{er} \text{ cas } \lambda = 0}$: $x'(t) = iC_x \Rightarrow x(t) = \underset{0}{x(0)} + itC_x$

Comme $x(1) = 0$ alors $C_x = 0$ d'où $x \equiv 0$.

Donc $0 \notin \sigma_p(T)$.

$\boxed{2^{ème} \text{ cas } \lambda \neq 0}$; $e^{i\lambda t} x(t) = \underset{\overset{\|}{0}}{x(0)} + C_x \dfrac{e^{i\lambda t} - 1}{\lambda}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{C_x}{\lambda}\left[1 - e^{-i\lambda t}\right]$$

$x(1) = 0 \Rightarrow \dfrac{C_x}{\lambda}\left[1 - e^{-i\lambda}\right] = 0$ ⟶ $C_x = 0 \Rightarrow x \equiv 0$
ou ⟶ $e^{i\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}^*$.

D'où $x(t) = \dfrac{C_x}{2\pi n}\left[1 - e^{-2\pi i n t}\right] \Rightarrow C_x = \dfrac{C_x}{2\pi n}\left[1 - \dfrac{e^{-2\pi i n} - 1}{-2\pi i n}\right]$ 2pts

d'où $C_x\left(1 - \frac{1}{2\pi n}\right) = 0 \Rightarrow C_x = 0 \Rightarrow x \equiv 0$.

Dans ce cas aussi $\lambda \notin \sigma_p(T)$..

En définitive $\boxed{\sigma_p(T) = \emptyset}$

Spectre ponctuel de T^* : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T^*x = \lambda x$; alors

$$\left(e^{i\lambda t} x(t)\right)' = i C_x e^{i\lambda t}$$

$\boxed{1^{er} \text{ cas } \lambda = 0}$ $x'(t) = iC_x \Rightarrow x(t) = x(0) + iC_x t$

$\Rightarrow C_x = x(0) + \dfrac{iC_x}{2}$ car $\int_0^1 t\,dt = 1/2$.

$\Rightarrow C_x = \dfrac{x(0)}{1 - i/2}$ et donc

$$\boxed{x(t) = x(0)\left[1 + \frac{i}{1 - i/2} t\right]}$$

0 est une valeur propre de T^*.

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas } \lambda \neq 0}$. $\quad e^{i\lambda t} x(t) = x(0) + \frac{C_x}{\lambda}\left[e^{i\lambda t} - 1\right]$

$$\Rightarrow x(t) = x(0)\, e^{-i\lambda t} + \frac{C_x}{\lambda}\left[1 - e^{-i\lambda t}\right]$$

$$\Rightarrow C_x = x(0)\left(\frac{e^{-i\lambda} - 1}{-i\lambda}\right) + \frac{C_x}{\lambda}\left[1 - \frac{e^{-i\lambda} - 1}{-i\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow C_x\left[1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-i\lambda} - 1}{-i\lambda^2}\right] = x(0)\left(\frac{e^{-i\lambda} - 1}{-i\lambda}\right) \quad / \times (-i\lambda^2)$$

$$\Rightarrow C_x \cdot \underbrace{\left[-i\lambda^2 + \lambda + e^{-i\lambda} - 1\right]}_{\tau(\lambda)} = x(0)\,\lambda\left(e^{-i\lambda} - 1\right)$$

Vérifions que $\tau(\lambda) \neq 0$. $\quad \tau(\lambda) = (\lambda + \cos\lambda - 1) - i(\lambda^2 \sin\lambda)$

Si $\tau(\lambda) = 0$ alors $\begin{cases} \lambda + \cos\lambda - 1 = 0 \\ \text{et} \\ \lambda^2 \sin\lambda = 0 \end{cases}$

On a déjà $\lambda \neq 0$, donc si $\sin\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = k\pi$ $(k \neq 0)$ et dans la première équation $k\pi + \cos(k\pi) - 1 = k\pi + (-1)^k - 1 \neq 0$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$

Donc on peut exprimer C_x à l'aide de $x(0)$:

$$C_x = x(0)\,\frac{\lambda\left(e^{-i\lambda} - 1\right)}{\tau(\lambda)}.$$

On a bien une fonction $x \in W^{1,2}([0,1])$ tq $T^* x = \lambda x$.

D'où $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. En définitive $\boxed{\sigma_p(T^*) = \mathbb{R}}$

4°/ <u>Spectre de T</u> : $\quad \sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma_r(T) = \sigma_p(T^*) = \mathbb{R}$ 2pts

Donc $\boxed{\sigma(T) = \mathbb{R}}$ $\quad (\sigma_c(T) = \emptyset)$. 2pts