Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2022-2023.

Master II : EDP et Applications
Module : Analyse Fonctionnelle II
Durée : 1h30

Examen de Rattrapage

Exercice-01 : **(09 points)**

1. On considère le domaine $\Omega = \{x \in I\!R^N : |x| > a > 0\}$. Soit la fonction
$$u(x) := \log(1 + |x|^{-k}) \qquad k > 0$$
2. Montrer que $u \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $k > 0$.
3. Trouver les valeurs de p, k tel que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (**indication :** Utiliser le fait que $\log(s + 1) \equiv s$ si $s \to 0^+$).
4. On suppose que $\Omega = B_1(0)$ et $k \geq 1$. Trouver $p \geq 1$ tel-que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

II- Soit p, q, r trois nombres positifs tels que
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Étant donné les fonctions f, g, h appartenant respectivement à $L^p(\Omega), L^q(\Omega)$ et $L^r(\Omega)$; montrer que
$$fgh \in L^1(\Omega) \text{ et que } \|fgh\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \|h\|_{L^r(\Omega)}.$$
III-On suppose que (E, A, μ) est un espace mesuré et f, g deux fonctions mesurables positive de E dans $\mathbb{R}^+$ telles que $fg \geq 1$.

Montrer que
$$\int_E f(x)d\mu \int_E g(x)d\mu \geq \mu(E)^2.$$

Exercice-02 : **(11 points)**

I-On considère le problème suivant :
$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{1}{1+u^2} = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$
Où $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ une fonction positive, et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. Donner la forme variationnelle associée au problème (2) puis vérifier que chaque terme est bien défini.
2. Trouver la fonctionnelle d'énergie J associée au problème (2).
3. Montrer que le problème (2) possède une solution faible.

II-Répondre aux mêmes questions précédentes pour le problème suivant :
$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{1}{1+u^2} + u^q & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$
Où $1 < q < 2^* - 1$.

Bonne chance.