Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Mai 2023.
Eléments finis. (Master1-EDP_S2)

Epreuve finale

(durée : 02 h 10 mn)

<u>Questions de cours</u> **[14.5 pts]**

1) Dans $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$, un polyèdre est-il un n_simplexe ? Confirmer la réponse par une justification ou par un contre-exemple **(1pt)**
2) Dans $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$, comment peut on vérifier qu'un polyèdre K possédant m sommets a_j ($j = 1,\ldots,m$) est un n_simplexe de $\mathbf{R}^n$? **(1pt)**

3) Dans $\mathbf{R}^n$, K étant un n-simplexe de sommets a_j ($j = 1,\ldots,n+1$), montrer que les coordonnées barycentriques λ_i ($i = 1,\ldots,n+1$) de tout point x de $\mathbf{R}^n$ sont des fonctions affines de x. c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$\forall i = 1,\ldots,n+1 \quad \lambda_i : \quad \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$x \to \lambda_i(x) = \lambda_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_{i,n+1} \quad . \qquad \textbf{(1pt)}$$

4) $(\widehat{K}, \widehat{P}_k, \widehat{\Sigma}_k)$ et (K, P_k, Σ_k) étant deux éléments finis n_simplexes de type (k) et F étant la transformation affine qui rendra ces deux éléments finis affine-équivalents t.q à tout pt $\hat{x}$ de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées barycentriques $\widehat{\lambda}_j(\hat{x})_{j=1}^{n+1}$ fait correspondre $x = F(\hat{x})$ de coordonnées barycentriques $\lambda_j(x)_{j=1}^{n+1}$ avec $\lambda_j(x) = \widehat{\lambda}_j(\hat{x})$ $j = \overline{1, n+1}$,

   Montrer alors que : **4a)** $K = F(\widehat{K})$ **4b)** $\Sigma_k = F(\widehat{\Sigma}_k)$. **(2pts)**

5) On considère une bijection F de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Soit $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ un éléments fini de Lagrange, $\overline{K}$ compact, connexe t.q. int ($\overline{K}$) non vide, $\overline{P}$ espace vectoriel de fonctions $\overline{p}$: $\overline{K} \to \mathbf{R}$, dim $\overline{P}$ = Card ($\overline{\Sigma}$) = N (où $\overline{\Sigma} = \{\bar{a}_j\}_{j=1}^{N}$ est $\overline{P}$ -unisolvant). Alors on désire montrer que le triplet (K, P, Σ) où $K = F(\overline{K})$,

   $P = \{p : K \to R; \exists \overline{p} \in \overline{P} / \overline{p} = p \circ F\} = \{p : K \to R; \exists \overline{p} \in \overline{P} / p = \overline{p} \circ F^{-1}\}$ et où $\Sigma = F(\overline{\Sigma})$ est aussi un élément fini de Lagrange.

   Pour cela, on doit montrer que Σ est P-unisolvant en explicitant la base de fonctions de forme $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ de P à partir de la base de fonctions de forme de $\overline{P}$ via la bijection F :

   5a) Montrer que Card (Σ) = Card ($\overline{\Sigma}$). **(1pt)**

   5b) On note par $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{N}$ la base de fonctions de forme de $\overline{P}$ ($\bar{p}_i(\bar{a}_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq N =$ Card ($\overline{\Sigma}$)).

   5b1) Ecrire alors les fonctions p_i ($i=1,\ldots,N$) de P en fonction des fonctions de forme de $\overline{P}$ et F. **(1pt)**

   5b2) Vérifier que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i,j \leq N$ où $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$. **(1pt)**

   5b3) Vérifier aussi que les fonctions p_i ($i = 1,\ldots,N$) forment un système libre de fonctions linéairement indépendantes. **(1pt)**

   5b4) En déduire que dim P = Card(Σ) = dim $\overline{P}$. **(1pt)**

6) Dans **R**,

   6a) qu'est ce que le 1_simplexe ? **(0.5pt)**

   6b) Montrer qu'il n'y a qu'un seul point du 1_simplexe dont les coordonnées barycentriques sont égales et montrer qu'il s'agit du point situé à égale distance des sommets du 1_simplexe. **(1pt)**

7) Dans **R**, soient $(\overline{K}, \overline{P}, \overline{\Sigma})$ et (K, P, Σ) deux éléments finis de Lagrange affine-équivalents avec $\overline{K}$ et K deux parties compactes, connexes et disjointes de **R**. On suppose que les fonctions de forme de $\overline{P}$ sont des polynômes du second degré. Alors

   7a) Montrer que les fonctions de forme de P sont aussi des polynômes du 2^{nd} degré. **(2pts)**

   7b) En déduire que toute fonction de P est aussi un polynôme de degré ≤ 2. **(1pt)**

Exercice **[05.5 pts]**

Dans R, on partage l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) en M+1 sous-intervalles $K_i = [a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0,\dots,M$) de longueur $h_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 0,\dots,M$). On pose $a_0 = a$, $a_{M+1} = b$ et $a_{i+1} = a_i + h_i$ pour $i = 0,\dots,M$.

1) Dans cette discrétisation, quels sont les 1_simplexes auxquels on peut associer des éléments finis 1_simpliciaux (éléments finis 1_simplexes de type (1)) ? Justifier **(0.5pt)**
2) L'intervalle $[0, 1]$ étant un 1_simplexe de référence, déterminer les coordonnées barycentriques de tout point $\hat{x}$ de $\hat{K} = [0, 1]$. **(1pt)**
3) Préciser le treillis principal d'ordre 1 : $\hat{\Sigma}_1$ associé à $\hat{K}$ et montrer que $\hat{\Sigma}_1 = \{0, 1\}$. **(1pt)**
4) Déterminer la base de fonctions de forme de $\hat{P}_1$ (espace des fonctions affines sur $[0, 1]$) à partir de la formule générale donnant la fonction de forme p_m de multi-indice $m = (m_1, \dots, m_n)$ de P_k (espace des polynômes de n variables de degré $\leq$ k. Voir rappel A)). Vérifier ensuite que $\dim \hat{P}_1 = \mathrm{Card}(\hat{\Sigma}_1)$. **(1.5pts)**
5) Utilisant la formule générale donnant la transformation affine inversible F (Voir rappel C)), déterminer l'application affine inversible F_i qui assure l'équivalence affine entre les deux éléments finis 1_simpliciaux : $(\hat{K}, \hat{P}_1, \hat{\Sigma}_1)$ et $(K_i, P_{1,i}, \Sigma_{1i})$ où $K_i = [a_i, a_{i+1}]$, $P_{1,i}$ est l'espace des polynômes à une variable de degré ≤ 1 sur K_i et enfin $\Sigma_{1i} = \{a_i, a_{i+1}\}$. Déterminer ensuite F_i^{-1}. **(1.5pts)**

Rappels utiles (Dans le cas général : Dans $\mathbf{R}^n$ avec $k \in \mathbf{N}^*$)

A) Pour un élément fini n-simplexe de type (k) : (K, P_k, Σ_k) la fonction de forme de multi-indice : $m = (m_1, \dots, m_n)$ (avec $\sum_{j=1}^{n+1} m_j = k \;\; k \in N^*$) de l'espace P_k ($k \geq 1$), est donnée par la formule suivante :

$$p_m(x) = \prod_{j=1}^{n+1}(m_j!)^{-1} \cdot \prod_{\substack{j=1\\ m_j \geq 1}}^{n+1}\left[\prod_{i=0}^{m_j-1}(k\lambda_j(x) - i)\right]$$ où $x \in K \subset R^n$ et $\lambda_j(x)$ est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée barycentrique

de x par rapport aux sommets a_j ($j = 1,\dots,n+1$) du n-simplexe K.

B) Pour le même élément fini (K, P_k, Σ_k), le treillis principal est :

$$\Sigma_k = \left\{x \in R^n / \lambda_j(x) \in \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\right\} \text{pour } j = 1, \dots, n+1\right\} \; (k \in N^*).$$

C) La formule générale donnant la transformation affine-inversible F assurant l'équivalence affine entre deux éléments finis n_simplexes de type (k) : (K, P_k, Σ_k) et $(\overline{K}, \overline{P_k}, \overline{\Sigma_k})$ est la suivante :

$F : \overline{K} \subset \mathbf{R}^n \to K \subset \mathbf{R}^n$

$\quad \overline{x} \to x = F(\overline{x}) = \mathbf{B'}\,\overline{x} + b$ où $\mathbf{B'}$ est la première sous-matrice d'ordre n de $\mathbf{B} = A_n \overline{A_n}^{-1}$.

On rappelle alors que $\mathbf{B}$ est d'ordre (n+1) puisque A_n et $\overline{A_n}^{-1}$ le sont. On rappelle aussi que :

$A_n = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_{n+1} \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix}$ où a_j ($j=1,\dots,n+1$) sommets du n_simplexe K et $\overline{A_n} = \begin{pmatrix} \overline{a}_j \dots \overline{a}_{n+1} \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix}$ où $\overline{a}_j$ ($j=1,\dots,n+1$) sommets du n_simplexe $\overline{K}$. On rappelle également que b est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ regroupant les n premiers éléments de la dernière colonne de la matrice (d'ordre n+1) $\mathbf{B}$.

Remarque : Dans $\mathbf{R}$ (n=1)

$F : \overline{K} = [\overline{a}, \overline{b}] \to K = [a, b]$

$\quad \overline{x} \to x = F(\overline{x}) = \alpha\,\overline{x} + \beta$ où α et $\beta \in \mathbf{R}$ avec $\alpha \neq 0$ (F étant inversible).

On a alors :

$\forall\, \overline{p} \in \overline{P_k}\; \exists!\, p \in P_k / \overline{p} = p \circ F$ et aussi $\forall\, p \in P_k\; \exists!\, \overline{p} \in \overline{P_k} / p = \overline{p} \circ F^{-1}$.

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Mai 2023.
Th. Eléments finis. (Master1-EDP_S2)

Corrigé de l'épreuve finale

Questions de Cours   0.5pt pour Non et 0.5pt pour le contre-exple.

1) Non puisque le n-cube est 1 polyèdre de $\mathbb{R}^n$ possédant 2^n sommets alors que le n-simplexe n'en possède que $n+1$ maximum. $(n\geq 2)$

2) Il suffit de vérifier que $m=n+1$ (0.5pt) et que la matrice $A_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ est inv. 0.5pt

3) Il suffit pour cela de résoudre le syst. lin. (sous forme matricielle) permettant de définir les coords barycentriques $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,n+1})$ en fction des coords cartésiennes $x_j(x)$ $(j=\overline{1,n})$: $A_n \begin{bmatrix}\lambda_1(x)\\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_1(x)\\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x)\end{bmatrix} = A_n^{-1}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \\ 1\end{bmatrix}$ 0.5pt

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n+1 \quad \lambda_i(x) = b_{i,1}x_1 + b_{i,2}x_2+\dots+b_{i,n}x_n + b_{i,n+1}$ 0.5pt

c.à.d. $\lambda_i : X=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto \lambda_i(x)=\sum_{j=1}^n b_{i,j}x_j + b_{i,n+1}$ pour $i=1,\dots,n+1$

4) $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $\hat{x}\longmapsto F(\hat x)=x$ t.q. si $\hat\lambda_j(\hat x)$ $(j=\overline{1,n+1})$ st les coordonnées barycentriques de $\hat x$ % à $\hat K$ et $x=F(\hat x)$ alors les coords barycent. de x par rapport K : $\lambda_j(x)$ $(j=\overline{1,n+1})$ sont t.q. $\hat\lambda_j(\hat x)=\lambda_j(x)$ pour $j=1,\dots,n+1$.

4a) On montre alors que $K=F(\hat K)$ c.à.d. $K\supset F(\hat K)$ et $K\subset F(\hat K)$:
On rappelle la caractérisation du n-simplexe : $K=\{x\in\mathbb{R}^n;\ 0\le\lambda_j(x)\le 1 \text{ pour } j=\overline{1,n+1}\}$.
De même pour $\hat K = \{\hat x\in\mathbb{R}^n;\ 0\le\hat\lambda_j(\hat x)\le 1 \text{ pour } j=\overline{1,n+1}\}$. Si $\hat s\in\hat K$ alors $0\le\hat\lambda_j(\hat s)\le 1$ $j=\overline{1,n+1}$. et $\exists! s\in\mathbb{R}^n / s=F(\hat s)$ (F étant affine-inversible) et $\lambda_j(s)=\hat\lambda_j(\hat s)$ $(j=\overline{1,n+1})$ 0.5pt
$\Rightarrow 0\le\lambda_j(s)\le1$ $(j=\overline{1,n+1})$ $\Rightarrow s\in K$ c.à.d. $F(\hat K)\subset K$. Inversement, si $s\in K$ $\exists!\hat s\in\mathbb{R}^n/$ $s=F(\hat s)$ et $\lambda_j(s)=\hat\lambda_j(\hat s)$ $j=\overline{1,n+1}$ or $s\in K\Rightarrow 0\le\lambda_j(s)\le 1$ $j=\overline{1,n+1}$ $\Rightarrow 0\le\hat\lambda_j(\hat s)\le1\Rightarrow \hat s\in\hat K$ et $s=F(\hat s)\Rightarrow s\in F(\hat K)$ c.à.d. $K\subset F(\hat K)$. Conclusion : $K=F(\hat K)$. 0.5pt

4b) $\Sigma_k=\{x\in K/\lambda_j(x)\in\{0,\frac1k,\frac2k,\dots,\frac{k-1}{k},1\}, j=\overline{1,n+1}\}$; $\hat\Sigma_k=\{\hat x\in\hat K/\hat\lambda_j(\hat x)\in\{0,\frac1k,\dots,\frac{k-1}{k},1\}, j=\overline{1,n+1}\}$
$\forall x\in\Sigma_k$ $x=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{m_j}{k}a_j$ où $m_j\in\{0,1,\dots,k\}$ $\forall j=\overline{1,n+1}$. Par ailleurs $\exists!\hat x\in\mathbb{R}^n/x=F(\hat x)$ et $\hat\lambda_j(\hat x)=\lambda_j(x)$ pour $j=\overline{1,n+1}\Rightarrow\forall j=\overline{1,n+1}$ $\hat\lambda_j(\hat x)\in\{0,\frac1k,\dots,\frac{k-1}{k},1\}\Rightarrow\hat x\in\hat\Sigma_k$ et $x=F(\hat x)$ 0.5pt
$\Rightarrow x\in F(\hat\Sigma_k)$. Inversement, $x\in F(\hat\Sigma_k)\Rightarrow\exists!\hat x\in\hat\Sigma_k/x=F(\hat x)$ et $\lambda_j(x)=\hat\lambda_j(\hat x)$ pour $j=\overline{1,n+1}$.
Donc $\forall j=\overline{1,n+1}$ $\lambda_j(x)\in\{0,\frac1k,\frac2k,\dots,\frac{k-1}{k},1\}\Rightarrow x\in\Sigma_k$. Conclusion : $\Sigma_k=F(\hat\Sigma_k)$ 0.5pt

5) $(\bar K,\bar P,\bar\Sigma)$ élément fini de Lagrange. $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ bijection t.q. $K=F(\bar K)$,
$P=\{p:K\to\mathbb{R};\ \exists\bar p\in\bar P/p=\bar p\circ F^{-1}\}$ et t.q. $\Sigma=F(\bar\Sigma)$. Alors :

5a) $\bar\Sigma=\{\bar a_j\}_{j=1}^{N=Card(\bar\Sigma)}$ et $\Sigma=F(\bar\Sigma)=\{F(\bar a_j)\}_{j=1}^N\Rightarrow Card(\Sigma)=N=Card(\bar\Sigma)$. 1pt

5b) $\{\bar p_i\}_{i=1}^N$ base de fctions de forme de $\bar P\Rightarrow\bar p_i(\bar a_j)=\delta_{i,j}$ $1\le i,j\le N=Card(\Sigma)$.

5b1) $\forall p\in P\ \exists\bar p\in\bar P/p=\bar p\circ F^{-1}\Rightarrow$ On pose $p_i=\bar p_i\circ F^{-1}$ $\forall i=1,\dots,N$ et donc $\forall i=1,\dots,N$ $p_i\in P$ et $p_i=\bar p_i\circ F^{-1}$ pour $i=1,\dots,N=Card(\Sigma)$ 1pt

5b2) Si on note par a_j $(j=\overline{1,N})$ les pts de $\Sigma=\{F(\bar{a}_j)\}_{j=1}^{N} \Rightarrow a_j = F(\bar{a}_j)$

$\Rightarrow p_i(a_j) = \bar{p}_i \circ F^{-1}(F(\bar{a}_j)) = \bar{p}_i\left(F^{-1}(F(\bar{a}_j))\right) = \bar{p}_i(\bar{a}_j) = \delta_{i,j}$ pour $j=\overline{1,N}$. 0.5

car $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{N}$ base de fctions de forme de $\bar{P}$ pour $i,j=1,\dots,N$. 0.5

5b3) $\sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i = 0_P \Rightarrow \forall x \in K \ \sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i(x) = 0.$ $\forall j=\overline{1,N}$ $a_j \in \Sigma \subset K$ et donc si on remplace x par $a_j \in K$ $(j=1,\dots,N)$ on aura $\forall j=\overline{1,N}$ $\sum_{i=1}^{N} \beta_i p_i(a_j) = 0$ or $p_i(a_j)=\delta_{i,j}$ (Voir **5b2)**) ce qui permet d'écrire $\sum_{i=1}^{N}\beta_i \delta_{i,j} = 0 \ \forall j=\overline{1,N} \Rightarrow \beta_j \delta_{j,j} = 0 \ \forall j=\overline{1,N}$ 0.5

$\Rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j=1,\dots,N$ car $\delta_{i,j}=0$ si $i\neq j$ et $\delta_{i,i}=\delta_{j,j}=1$ $(i=j)$ 0.25

On a donc montré l'implication svte $\sum_{i=1}^{N}\beta_i p_i = 0_P \Rightarrow \beta_i = 0 \ \forall i=\overline{1,N} \Rightarrow$ les p_i $(i=\overline{1,N})$ sont lin. indépendantes. 0.25

5b4) $\dim P = N = \mathrm{Card}(\Sigma)$ et $\dim \bar{P} = \mathrm{Card}(\bar{\Sigma}) \xrightarrow{5a)} \dim P = \dim \bar{P}$
0.5pt 0.5pt

6) Dans $\mathbb{R}$, **6a)** le 1-simplexe est l'intervalle $[a,b]$ non dégénéré $(a\neq b)$. 0.5pt

6b) Le seul pt du 1-simplexe $[a,b]$ $(a,b<\infty$ et $a\neq b)$ dont les coords barycentriques sont égales est sans doute le centre de $[a,b]$: $\frac{1}{2}(a+b)=m$. En effet si on a $\lambda_1(m)=\lambda_2(m)$ avec $\lambda_1(m)+\lambda_2(m) = 1 = 2\lambda_1(m) = 2\lambda_2(m) \Rightarrow \lambda_1(m)=\lambda_2(m)=1/2$. 0.5

Comme $m=\lambda_1(m)a+\lambda_2(m)a \Rightarrow m=\frac{1}{2}(a+b)$ 0.5

7) $(\bar{K},\bar{P},\bar{\Sigma})$ et (K,P,Σ) deux éléments finis de Lagrange affine-équivalents sur $\mathbb{R}$ $(\bar{K},K\subset\mathbb{R}$ avec $\bar{K}\cap K=\emptyset \Rightarrow \bar{K}$ et K deux intervalles fermés bornés et disjoints de $\mathbb{R}$: $\bar{K}=[a_1,a_2]$ et $K=[b_1,b_2]$ avec, par exple, $a_1<a_2<b_1<b_2$.
On suppose aussi que les fonctions de forme de $\bar{P}$ sont des polynômes du 2nd degré c.à.d. de la forme : $\bar{p}_j(x)=\alpha_j x^2+\beta_j x+\gamma_j$ $(j=1,\dots,\mathrm{card}\,\bar{\Sigma})$. Il existe F affine-inversible définissant l'équivalence affine de $(\bar{K},\bar{P},\bar{\Sigma})$ et (K,P,Σ)
$\Rightarrow P=\{p:K\to\mathbb{R} / p\circ F\in\bar{P}\}$

7a) $P=\langle p_1,\dots,p_{\mathrm{card}(\Sigma)}\rangle$ où $p_j=\bar{p}_j\circ F^{-1}$ puisque $\forall j=1,\dots,\mathrm{Card}(\Sigma)$ $p_j\in P \Rightarrow$ la $j^{\text{ème}}$ fonction de forme de $\bar{P}$: $\bar{p}_j = p_j\circ F\in\bar{P} \Rightarrow p_j=\bar{p}_j\circ F^{-1}\in P$ et est aussi la $j^{\text{ème}}$ fonction de forme de P $(j=1,\dots,\mathrm{Card}(\Sigma)=\mathrm{Card}(\bar{\Sigma}))$. F étant affine-inversible $\Rightarrow$ 0.5
F^{-1} aussi et s'écrit sous la forme svte : $F^{-1}(\bar{x})=ax+b$ $(a\neq0)$ et $\bar{p}_j(\bar{x})=\alpha_j\bar{x}+\beta_j$ $(\alpha_j\neq0)$
Les fctions de forme de P sont donc $p_j(x)=(\bar{p}_j\circ F^{-1})(x)=\bar{p}_j(F^{-1}(x))=\alpha_j(F^{-1}(x))^2+\beta_j F^{-1}(x)$ 0.5
c.à.d. $p_j(x)=\alpha_j(ax+b)^2+\beta_j(ax+b)+\gamma_j=\underbrace{\alpha_j a^2}_{=A_j\neq0}x^2+\underbrace{a(2\alpha_j b+\beta_j)}_{=B_j}x+\underbrace{(\alpha_j b^2+\beta_j b+\gamma_j)}_{=C_j}$ 0.5 $+\gamma_j$
$=A_jx^2+B_jx+C_j$ 0.5 $j=1,\dots,\mathrm{card}(\Sigma)$

7b) Toute fction de $P=\langle p_1,\dots,p_{\mathrm{card}(\Sigma)}\rangle$ est une combinaison linéaire des fonctions de forme p_j $(j=1,\dots,\mathrm{card}(\Sigma))$ qui sont ttes des polynômes du 2nd degré 0.5
$\Rightarrow p=\sum_{j=1}^{\mathrm{card}(\Sigma)}\xi_j p_j$ est aussi un polynôme du 2nd degré au plus. 0.5

Exercice

1) Dans cette discrétisation, les 1-simplexes sont les intervalles $K_i = [a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, M$ puisque $\forall i = 0, \dots, M$ on a $a_i \neq a_{i+1}$ (0.25

(0.25

2) $\overline{K} = [0,1]$, les sommets de $\overline{K}$ étant les bornes 0 et 1 $\Rightarrow \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1(\overline{x}) \\ \overline{\lambda}_2(\overline{x}) \end{pmatrix} = \overline{A}_1^{-1} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\overline{x} \\ \overline{x} \end{bmatrix}$ Donc $\forall \overline{x} \in \overline{K}$ $\overline{\lambda}_1(\overline{x}) = 1 - \overline{x}$ et $\overline{\lambda}_2(\overline{x}) = \overline{x}$ 0.5pt + 0.5pt

Vérif. $\forall \overline{x} \in \overline{K} = [0,1]$ $\overline{\lambda}_1(\overline{x}) + \overline{\lambda}_2(\overline{x}) = 1 - \overline{x} + \overline{x} = 1$

3) $\overline{\Sigma}_1 = \{ \overline{x} \in \mathbb{R} \text{ (ou } [0,1]) / \overline{\lambda}_j(\overline{x}) \in \{0, 1\}\ j = 1, 2 \}$ ($k=1$ $m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 1$ ou $m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 0$)

Ici il y a 2 possibilités pour exprimer les coords barycentriques des pts de $\overline{\Sigma}_1$:

1ère possibilité : $\overline{\lambda}_1(\overline{x}) = 0$ et $\lambda_2(\overline{x}) = 1 \Rightarrow \overline{x}_1 = \frac{0}{1}(0) + \frac{1}{1}(1) = 1 \in \overline{\Sigma}_1$

2nde possibilité : $\overline{\lambda}_1(\overline{x}) = 1$ et $\lambda_2(\overline{x}) = 0 \Rightarrow \overline{x}_0 = \frac{1}{1}(0) + \frac{0}{1}(1) = 0 \in \overline{\Sigma}_1$

$\Rightarrow \overline{\Sigma}_1 = \{0, 1\} = \partial \overline{K}$

(0.5pt + 0.5pt

4) Détermination de la base de fonctions de forme de $\overline{P}_1$:

Ici $k = 1$ et $n = 1$. On a déjà vu en 4) que, ds ce cas, il n'y a que 2 possibilités : pour les valeurs entières des m_j $(j = 1, 2)$; $m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = k - m_1 = 1 - m_1 = 1$

$m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 1 - m_1 = 1 - 1 = 0$

La formule générale donnant les fonctions de forme (Voir Rappel A) entraîne que

$m_1 = 0$ et $m_2 = 1$ $\overline{P}_0(\overline{x}) = \underbrace{\prod_{j=1}^{2} (m_j!)^{-1}}_{1} \prod_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{2} \left(\prod_{i=0}^{m_j - 1} (\overline{\lambda}_j(\overline{x}) - i) \right) = \prod_{i=0}^{m_2 - 1} (\overline{\lambda}_2(\overline{x}) - 0) = \overline{\lambda}_2(\overline{x}) = \overline{x}$ 0.5pt

$m_1 = 1$ et $m_2 = 0$ $\overline{P}_1(\overline{x}) = 1 \prod_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{2} \left(\prod_{i=0}^{m_j - 1} (\overline{\lambda}_j(\overline{x}) - i) \right) = \prod_{i=0}^{m_1 - 1} (\overline{\lambda}_1(\overline{x}) - 0) = \overline{\lambda}_1(\overline{x}) = 1 - \overline{x}$ 0.5pt

Donc les fonctions de forme de $\overline{P}_1$ sont : $\overline{P}_0(\overline{x}) = \overline{x}$ et $\overline{P}_1(\overline{x}) = 1 - \overline{x}$. Après renumérotation (pour respecter les indices des coords barycentriques), on peut écrire :

$\overline{P}_1(\overline{x}) = \overline{\lambda}_1(\overline{x}) = 1 - \overline{x}$ et $\overline{P}_2(\overline{x}) = \overline{\lambda}_2(\overline{x}) = \overline{x}$.

Donc $\dim \overline{\mathbb{P}}_1 = 2 = \mathrm{Card}(\overline{\Sigma}_1) = \frac{(1+1)!}{1!\,1!} = 2$ (0.5pt

5) D'après le rappel C), en dimension $n = 1$ et lorsque $\overline{K} = [0,1]$ et $K_i = [a_i, a_{i+1}]$, on a

$A_1 = \begin{bmatrix} a_i & a_{i+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Donc $B = A_1 . \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_i & a_{i+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_i + a_{i+1} & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc $x = F_i(\overline{x}) = (-a_i + a_{i+1})\overline{x} + a_i = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} + a_i$ $\boxed{\begin{array}{l} B' = -a_i + a_{i+1} \neq 0 \text{ car } a_{i+1} \neq a_i \\ b = a_i \end{array}}$ (1pt

F_i est affine-inversible car $a_{i+1} - a_i \neq 0$ $\forall i = \overline{0, M}$

$x = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} + a_i \Rightarrow x - a_i = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} \Rightarrow \overline{x} = F_i^{-1}(x) = \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$ (0.5pt

Donc $F_i^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F_i^{-1}(x) = (x - a_i)/(a_{i+1} - a_i)$