Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
A.U. 2022/2023
Master1: EDP et applications

Examen final: Résolution des équations elliptiques

Durée: 1h30

Exercice 1 (08 points)

On cherche à établir l'existence de solutions du problème suivant:

$$(1)\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -\operatorname{div} DF(\nabla u) = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application convexe satisfaisant les hypothèses suivantes:

i /$\forall \zeta \in \mathbb{R}^n$, $|F(\zeta)| \leq C(1+|\zeta|^p)$, $1 < p < +\infty$ et C une constante positive.

ii / $F(\zeta) \geq \alpha |\zeta|^p - \beta$, α et β des constantes positives.

iii / $f \in L^{p'}(\Omega)$.

1/ Déterminer J la fonctionnelle d'énergie associée au problème (1). $(1.5pt)$

2/ Montrer qu'il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui minimise J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. $(3.5pts)$

3/ Sous quelle(s) condition(s) J admet un minimum unique.$(1pt)$

4/ Supposons maintenant que F est de classe C^1 satisfaisant $|DF(\zeta)| \leq C\left(1+|\zeta|^{p-1}\right)$. Montrer que tout point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimum de J est solution d'un problème variationnel à déterminer.$(1pt)$

Indication: Considérer la fonction $j(t) := J(u+tu)$, $t \in [-1,1]$, Montrer que j est de classe C^1.

5/ Conclure.$(1pt)$

Exercice 2 (12 points)

Considérons le problème suivant:

$$(2)\begin{cases} -\triangle u = \lambda u + g(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, λ un paramètre positif, g:$\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mesurable pour presque tout x dans Ω et continue pour $u \in \mathbb{R}$, vérifiant les hypothèses suivantes:

i/ $|g(x,s)| \leq \alpha + \beta |s|^q$, α et β des constantes positives, $q < \frac{n+2}{n-2}$.

ii/ G étant la primitive de g vérifiant $G(x,0) = 0$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|s| \leq \delta$, $|G(.,s)| \leq \varepsilon |s|^2$.

iii/ $\exists \mu > 2$, $R > 0$ tel que si $|s| \geq R$, $0 < \mu G(x,s) \leq s g(x,s)$.

1/ Déterminer E la fonctionnelle d'énergie associée au problème (2), montrer que E est de classe C^1. $(3pts)$

2/ Montrer que E n'est pas bornée inférieurement.$(2pts)$

3/ Sous quelles conditions l'origine est un minimum local de E sur $H_0^1(\Omega)$. $(2pts)$

4/ Montrer que toute suite de Palais Smale est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ .Déduire qu'il existe une sous suite qui converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$. $(3pts)$

5/ Conclure.$(2pts)$

Corrigé

Exercice 1

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -\operatorname{div} DF(\nabla u) = f \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

1/ La fonctionnelle d'énergie associée au pb(1).

$$J(u) = \int_\Omega F(\nabla u)\,dx - \int_\Omega f u\,dx$$

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

2/ Mq $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui minimise J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On remarque que J est convexe puisque F l'est.

Nous allons appliquer le Th de minimisation. J est bien définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ grâce à (i).

Montrons que J est coercive.

En utilisant l'hypothèse (ii) on a

$$J(u) \geq \alpha \int |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega \beta\,dx - \int f u\,dx$$

En utilisant Hölder et Poincaré (généralisée)

$$J(u) \geq \alpha \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \beta |\text{mes }\Omega| - \|f\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p}$$

$$\geq \alpha \|u\|^p_{W_0^{1,p}} - \beta|\Omega| - C\|f\|_{L^{p'}} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

qd $\|u\| \longrightarrow \infty$ $J(u) \longrightarrow +\infty$ d'où la coercivité de J.

Mq J est faiblement s.c.i.

Soit (u_n) une suite minimisante (de $W_0^{1,p}(\Omega)$). de J i.e

$$J(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in W_0^{1,p}} J(u).$$

(u_n) est bornée ds $W_0^{1,p}(\Omega)$ (sinon on peut faire un raisonnement par l'absurde). Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif, on on peut extraire une sous suite notée u_n tq ②

$u_n \longrightarrow u$ pp Ω, $u_n \longrightarrow u$ ds L^q $q < p^* = \frac{np}{n-p}$

$u_n \rightharpoonup u$ ds $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Comme F est convexe et localement bornée, elle est continue, elle vérifie donc

$F(\nabla u_n) \longrightarrow F(\nabla u)$ pp Ω.

$|F(\nabla u_n)| \leq C(1 + |\nabla u_n|^p) \leq C(1 + |g(x)|^p) \in L^1(\Omega)$

(ceci grâce au Th de l'analyse fonctionnelle)

les hyp du Th de cvge dominée sont satisfaites.

alors $\int_\Omega F(\nabla u_n)dx \to \int_\Omega F(\nabla u)\,dx$. Par conséquent.

$J(u) \leq \liminf \left(\int_\Omega F(\nabla u_n)dx - \int_\Omega f u_n dx\right)$

(Rq: on peut utiliser le lemme de Fatou).

3/ J admet un minimum unique si F est strictement convexe (vu en cours).

4/ Mq tout point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimum de J est solution du problème variationnel.

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega DF(\nabla u)\nabla v\,dx = \int f v\,dx$.

Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ce qui implique que $J(u+tv)$ est bien définie.

$j : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$t \rightsquigarrow j(t) = J(u+tv)$ a un minimum en $t=0$.

Mq j est de classe C^1.

On a

3

$$j(t) = J(u+tv) = \int_\Omega F(\nabla u + t\nabla v) - \int_\Omega fu - t\int_\Omega fv.$$

Posons $G(x,t) = F(\nabla u + t\nabla v)$, G est de classe C^1 par rapport à t.

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = DF(\nabla u + t\nabla v)\cdot\nabla v(x).$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)\right| \leq |DF(\nabla u + t\nabla v)|\,|\nabla v|$$
$$\leq C\left(1 + |\nabla u + t\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla v|.$$

On utilise le fait que $(x+y)^{p-1} \leq C\left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)\right| \leq C\left(1 + |\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}\right)|\nabla v|.$$

Comme $\nabla u \in \left(L^p(\Omega)\right)^n$ alors $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\overset{=p'}{p/p-1}}(\Omega)$

On peut appliquer Holder

$|\nabla u|^{p-1}\,|\nabla v| \in L^1(\Omega)$ et $|\nabla v|^p \in L^1(\Omega)$.

$\frac{\partial G}{\partial t}$ est dominée par une fct ~~d~~appartenant à $L^1(\Omega)$ unif pour tout $t \in [-1,1]$. D'après le Th de dérivation sous le signe intégrale on déduit que la fonction $\int G(x,t)\,dx$ est de classe C^1 et que sa derivée est donnée par

$$j'(t) = \int_\Omega DF\left(\nabla u(x) + t\nabla v(x)\right)\cdot\nabla v(x)\,dx - \int f(x)v(x)\,dx$$

Comme j a un minimum en $t=0$, il vient que $j'(0)=0$ qui n'est autre que l'equation d'Euler Lagrange.

Conclusion : Tout point critique de J est solution du problème

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -\operatorname{div} DF(\nabla u) = f \quad \text{au sens } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

Exercice 2:

Fait en cours.