Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 2.
Module : *Théorie Spectrale* - Épreuve Finale.
Dimanche 21/05/2023 - Durée : 01h30mn.

<u>Exercice 1 :</u> (10pts) On considère l'espace de Banach $X = C([0,1];\mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes, muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit l'opérateur T par

$$(Tx)(t) = x'(t)$$

sur le domaine

$$D(T) = \left\{x \in X \,/\, x \in C^1([0,1];\mathbb{C}) \text{ et } x(0) = 0\right\}$$

1. Montrer que T est non-borné. (Indication : on pourra utiliser les monômes $p_n(t) = t^n$, avec $n \geq 1$)
2. Le domaine $D(T)$ est-il dense dans X ?
3. Montrer que T est fermé.
4. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda I - T$ est injectif, puis calculer la résolvante $R(\lambda, T)$ de T au point λ.
5. En déduire enfin le spectre de T.

<u>Exercice 2 :</u> (10pts) On considère l'espace de Hilbert $H = \ell_2(\mathbb{C})$ avec le produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,\overline{y}_n$ et la norme associée. On rappelle qu'une base hilbertienne de H est donnée par $e_k = (\delta_n^k)_{n\geq 1}$. On définit l'opérateur T par

$$(Tx)_n = n\, x_n \quad , \qquad \text{pour } x = (x_1, x_2, \ldots) \in H.$$

1. Montrer que le spectre de T est $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
2. Montrer que le sous-espace propre associé à une valeur propre est de dimension 1.
3. Soit S un opérateur définit dans H, borné et inversible. On suppose que $S(D(T)) \subset D(T)$ et que $S\,T = T\,S$ sur $D(T)$. Montrer alors qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ bornée dans $\mathbb{C}$ telle que

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (b_1 x_1, b_2 x_2, \ldots, b_n x_n, \ldots).$$

$1^{ère}$ année de Master E.D.P - Semestre 2 - 2022/2023.

Module: "Théorie Spectrale" - Epreuve Finale - Corrigé.

Exercice 1: (10 pts). $X = C([0,1]; \mathbb{C})$, $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$

$(Tx)(t) = x'(t)$; $D(T) = \{x \in X / x \in C^1([0,1])$ et $x(0) = 0\}$.

1°/ Pour montrer que T est non-borné (i.e. $\nexists \alpha > 0$ tq $\|Tx\|_\infty \leq \alpha \|x\|_\infty$) on peut utiliser les monomes $P_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

On a $\|P_n\|_\infty = 1$ car la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0,1]$ et admet son maximum en $t = 1$. 2pts

Aussi $(TP_n)(t) = n t^{n-1} \Rightarrow \|TP_n\|_\infty = n$ ($\|P_{n-1}\|_\infty = 1$);

donc, $\dfrac{\|TP_n\|_\infty}{\|P_n\|_\infty} = \dfrac{n}{1} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où le résultat.

2°/ Densité de $D(T)$ dans X ? La convergence selon la norme $\|\cdot\|_\infty$ est la convergence uniforme sur $[0,1]$. Donc si $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ dans X avec $x_n \in D(T)$ alors (x_k) converge simplement vers x (convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple). 2pts

En particulier $x_k(0) \longrightarrow x(0)$ or $x_k(0) = 0$ d'où $x(0) = 0$.

Mais ceci ne peut pas se produire pour les fonctions x telles que $x(0) \neq 0$, comme par exemple $x(t) \equiv 1$.

Donc $D(T)$ n'est pas dense dans X.

3°/ T est fermé: Soit (x_n) une suite dans $D(T)$ tq

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \text{et} \\ x_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \end{cases}$$

Il faut montrer que $x \in D(T)$ et $y = x'$.

On peut écrire $x_n(t) = \underbrace{x_n(0)}_{=0} + \int_0^t x_n'(s)\,ds$

$$x_n(t) = \int_0^t x_n'(s)\,ds.$$

Comme $x_n' \to y$ (uniformément) sur $[0,1]$, alors on peut intervertir limite et intégration. On obtient :

$$x(t) = \int_0^t y(s)\,ds \quad (\text{car } x_n(t) \longrightarrow x(t)).$$

y étant continue, alors $\int_0^t y(s)ds$ est dérivable, donc x' existe, de plus $x'(t) = y(t)$. Il est évident que $x(0) = 0$. 2pts

Donc on a bien montré que $x \in D(T)$ et $x' = Tx = y$.

4°/ Injectivité de $\lambda I - T$: Soit l'équation $(\lambda I - T)(x) = 0$

càd : $x'(t) = \lambda x(t) \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{\lambda t}$. Mais comme on doit avoir $x \in D(T)$, alors $x(0) = 0$ càd $C = 0$, d'où $x = 0$

donc $\lambda I - T$ est bien injectif. 1pt

Ceci implique que $\lambda I - T : D(T) \longrightarrow \mathrm{Im}(\lambda I - T)$ est bijectif.

Calculons dans ce cas son inverse. Posons $y = (\lambda I - T)^{-1}(x)$,

on a bien $\begin{cases} \lambda y(t) - y'(t) = x(t) \\ y \in D(T). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) - \lambda y(t) = -x(t) \\ y \in C^1 \text{ et } y(0) = 0. \end{cases}$

Multiplions par le facteur intégrant $e^{-\lambda t}$:

$$e^{-\lambda t} y'(t) - \lambda e^{-\lambda t} y(t) = -e^{-\lambda t} x(t) \Leftrightarrow \left(e^{-\lambda t} y(t)\right)' = -e^{-\lambda t} x(t)$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t} y(t) - \underbrace{y(0)}_{=0} = -\int_0^t e^{-\lambda s} x(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} x(s)\,ds}$$ ceci est une fonction dans $D(T)$ quelque soit $x \in X$. 1pt

$$\boxed{[R(\lambda, T)x](t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} x(s)\,ds}$$

$$\left|\left(R(\lambda,T)x\right)(t)\right| \leq \int_0^t e^{(t-s)Re(\lambda)} |x(s)| ds . \quad \left(Re(\lambda) : \text{partie réelle de } \lambda\right).$$

$$\leq \|x\|_\infty \int_0^t e^{(t-s)Re(\lambda)} ds = \|x\|_\infty \int_0^t e^{sRe(\lambda)} ds.$$

Deux cas se présentent :

i/ $\underline{Re\lambda = 0}$: alors $\left|\left(R(\lambda,T)x\right)(t)\right| \leq t \|x\|_\infty$

$$\Rightarrow \|R(\lambda,T)x\|_\infty \leq \|x\|_\infty \quad (R(\lambda,T) \text{ est borné}).$$

ii/ $\underline{Re\lambda \neq 0}$: $\displaystyle\int_0^t e^{sRe(\lambda)} ds = \frac{e^{tRe(\lambda)} - 1}{Re(\lambda)}$

et $\displaystyle\sup_{[0,1]} \frac{e^{tRe(\lambda)} - 1}{Re(\lambda)} = \frac{e^{Re(\lambda)} - 1}{Re(\lambda)}$ (il faut remarquer que $\frac{e^{Re(\lambda)} - 1}{Re(\lambda)}$ reste positif même si $Re(\lambda) < 0$)

Donc $\|R(\lambda,T)x\|_\infty \leq \left(\dfrac{e^{Re(\lambda)} - 1}{Re(\lambda)}\right) \|x\|_\infty$

et $R(\lambda,T)$ est aussi borné dans ce cas.

En définitive : $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $R(\lambda,T) : X \longrightarrow D(T)$ existe et est borné. Donc $\lambda \in \rho(T)$, ou encore $\rho(T) = \mathbb{C}$.

5°/ $\underline{\text{Spectre de } T}$: Comme $\rho(T) = \mathbb{C}$, alors

$$\boxed{\sigma(T) = \emptyset}$$

2pts

Exercice 2 : (10pts) $H = \ell_2(\mathbb{C})$

$$(Tx)_n = n\, x_n \ , \ \forall n \geq 1.$$

1°/ Spectre de T :

* Tout d'abord $Te_k = k e_k$, Donc $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est bien constitué de valeurs propre de T.
* Pour conclure que $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{N}^*$, il suffit de montrer que si $\lambda \neq n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) alors $\lambda \in \rho(T)$.

Posons $d_\lambda = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} |\lambda - n|$. ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ fixé)

Il est facile de voir que $d_\lambda > 0$. D'abord $d_\lambda \geq 0$ c'est évident. Puis si $d_\lambda = 0$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tq $0 \leq |\lambda - n_\varepsilon| < \varepsilon$ ou encore $n_\varepsilon \in B(\lambda, \varepsilon)$. Or $\mathbb{N}^*$ étant fermé dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ est un ouvert, donc $\exists \delta > 0$ tq $B(\lambda, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$, ou encore $B(\lambda, \delta) \cap \mathbb{N}^* = \emptyset$. Ceci contredit le cas de ε (ε qcq).

Maintenant $\|(\lambda I - T)x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda - n|^2 |x_n|^2 \geq d_\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ 4pts

$$\geq d_\lambda^2 \|x\|^2$$

c.à.d $\|(\lambda I - T)x\| \geq d_\lambda \|x\|$, c.à.d $\lambda I - T$ est injectif. Donc $\lambda I - T$ est inversible (sur son image) et $\|y\| \geq d_\lambda \|(\lambda I - T)^{-1} y\|$.

ou bien $\|(\lambda I - T)^{-1} y\| \leq \frac{1}{d_\lambda} \|y\|$. Notons enfin qu'on peut montrer que y parcourt H tout entier. En effet $(\lambda I - T)x = y \Leftrightarrow (\lambda - n)x_n = y_n$ ou encore $x_n = \frac{y_n}{\lambda - n}$ (rappelons que $\lambda \notin \mathbb{N}^*$).

Prenons $y \in H$ qcq, alors $x_n = \frac{y_n}{\lambda - n} \Rightarrow |x_n|^2 = \frac{|y_n|^2}{|\lambda - n|^2} \leq \frac{1}{d_\lambda^2} |y_n|^2$

c.à.d $x \in H$. De plus $(n x_n)_{n \geq 1} \in H$ car $|n x_n|^2 = \frac{n^2}{|\lambda - n|^2} |y_n|^2 \leq |y_n|^2 \times C_\lambda$

où $C_\lambda = \sup_{n \geq 1} \frac{n^2}{|\lambda - n|^2}$. En définitive $\lambda \notin \mathbb{N}^* \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$.

D'où $\boxed{\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{N}^*}$

2°/ Fixons $n_0 \in \mathbb{N}^*$. C'est une valeur propre. Cherchons le sous-espace propre associé, càd cherchons les $x \in H(D(T))$ tq $Tx = n_0 x$; alors $\forall j \geq 1$, $j x_j = n_0 x_j$

$\Leftrightarrow \forall j \geq 1,\ (j - n_0) x_j = 0$

* Si $j = n_0$ alors $x_j = x_{n_0}$ prend toutes les valeurs dans $\mathbb{C}$.
* Si $j \neq n_0$, alors $x_j = 0$. Donc

$$x = (0, 0, \dots, 0, x_{n_0}, 0, \dots, 0, \dots) = x_{n_0} e_{n_0}.$$

Ainsi le sous-espace propre est engendré par e_{n_0}, il est donc de dimension 1. 2pts

3°/ Expression de S : Vérifions que $D(T)$ est inclus dans $D(TS)$ et $D(ST)$.

En effet : $D(ST) = \{x \in H / x \in D(T)\}$ car S est défini partout.

donc $\boxed{D(ST) = D(T)}$.

D'autre part, $D(TS) = \{x \in H / Sx \in D(T)\} = \{x \in H / x \in S^{-1}(D(T))\}$

donc $D(TS) = S^{-1}(D(T))$. Mais comme $S(D(T)) \subset D(T)$

alors $D(T) \subset S^{-1}(D(T))$. Ainsi $D(T) \subset D(TS)$.

Donc TS et ST sont tous les deux définis sur $D(T)$. 4pts

Maintenant si x_* est un vecteur propre de T alors :

$$T(Sx_*) = S(Tx_*) = S(n_0 x_*) = n_0 S(x_*) \text{ càd}$$

$S(x_*)$ est aussi vecteur propre pour la même valeur propre. Comme le s/espace propre est de dimension 1 alors $S(x_*)$ et x_* sont co-linéaires, càd $S(x_*) = a_{n_0} x_{n_0}$.

En fait $x_* = e_{n_0}$. Mais comme S est borné alors la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée, d'où le résultat.

T.