Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2022-2023.

**Master II :** EDP et Applications
**Module :** Analyse Fonctionnelle II
Durée : 1h30

# Épreuve Finale

**Exercice-01** : **(05 points)**

— Citer l'inégalité de Morrey.

— Soit $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on pose $F(s) = \dfrac{s}{1+|s|}$, montrer que $F(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N, N \geq 2$, la fonction $u(x) = \ln\Big(\ln(1+\frac{1}{|x|})\Big)$ appartient à $W_0^{1,p}(B_1(0))$ pour tout $p \leq N$.

**Exercice-02** : **(06 points)**

On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; \sin(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Où $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ et $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. Donner la forme variationnelle associée au problème (3) puis vérifier que chaque terme est bien défini.
2. Trouver la fonctionnelle d'énergie $J$ associée au problème (3).
3. Montrer que le problème (3) possède une solution faible.
4. Donner une condition sur $\sigma$ pour que la solution du problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; \sigma\sin(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

soit unique.

**Exercice-03** : **(09 points)**

I. Soient $N \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + N > 0$. On désigne par $|.|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$.

— Vérifier que

$$\operatorname{div}\big(|x|^\alpha x\big) = (\alpha+N)|x|^\alpha.$$

— Démontrer l'inégalité de Hardy-Sobolev suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p |x|^\alpha \, dx \leq \Big(\frac{p}{\alpha+N}\Big)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p |x|^{\alpha+p} \, dx \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

II. On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + u_+^p & \text{dans } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Où $1 < p < 2^* - 1$, $0 < \lambda < \Big(\dfrac{N-2}{2}\Big)^2$, $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$.

1. Fixer le cadre fonctionnel de la solution.
2. Donner la formulation variationnelle du problème (5).
3. Montrer qu'il existe une solution faible $u$ du problème (5).
4. Démontrer que la solution $u$ est positive.

**Bonne chance.**

## Correction du Contrôle Continu

**Exercice-01**(Questions de cours) : **(05 points)**

- Citer l'inégalité de Morrey (voir le cours )**(02 points)** .
- Soit $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, on pose $F(s) = \dfrac{s}{1+|s|}$, montrer que $F(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ : Il suffit de démontrer que $\|\nabla F(u)\|_2 = \|F'(u)\nabla u\|_2 < \infty$ en utilisant le fait que $\|\nabla u\|_2 < \infty$ **(01.5 points)**
- Montrer que pour tout $x \in I\!R^N, N \geq 2$, la fonction $u(x) = \ln\Big(\ln(1+\frac{1}{|x|})\Big)$ appartient à $W_0^{1,p}(B_1(0))$ pour tout $p \leq N$. **(01.5 points)**

**Exercice-02** : **(06 points)**

On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; \sin(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Où $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ et $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

1. Donner la forme variationnelle associée au problème (3) puis vérifier que chaque terme est bien défini.

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega \sin(u)v\,dx - \int_\Omega fv\,dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad \textbf{(1.5=0.5+1 points)}$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty, \int_\Omega \sin(u)v\,dx \leq \int_\Omega |\sin(u)||v|\,dx \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty.$$

Où $p' < 2$

$$\int_\Omega fv\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C\|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty.$$

2. Trouver la fonctionnelle d'énergie $J$ associée au problème (3)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \cos(u)\,dx - \int_\Omega fu\,dx \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \textbf{(01 point)}$$

3. Montrer que le problème (3) possède une solution faible. Puisque $J$ est faiblement semi-continue inférieurement, coercive : Coercivité :

$$\lim_{\|u\|\to\infty} J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C - C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = +\infty$$

alors il existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $J(u_0) = a = \min\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)$ et $J'(u_0) = 0$ **(02.5 point)**

4. Donner une condition sur $\sigma$ pour que la solution du problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; \sigma\sin(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

soit unique.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux solutions $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tels que $u_2 \neq u_1$ alors

$$-\Delta(u_1 - u_2) + \sigma(\sin(u_1) - \sin(u_2)) = 0 \qquad \textbf{(01 point)} \tag{4}$$

En utilisant $(u_1 - u_2)$ comme fonction test dans (4), on obtient que $|\sigma| < \lambda_1$ où $\lambda_1$ est (la première valeur propre).

**Exercice-03** : **(09 points)**

I. Soient $N \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + N > 0$. On désigne par $|.|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$.

— Vérifier que

$$\operatorname{div}\big(|x|^{\alpha}x\big) = (\alpha + N)|x|^{\alpha}.....(1) \qquad \textbf{(01 point)}$$

— Démontrer l'inégalité de Hardy-Sobolev suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p |x|^{\alpha}\, dx \leq \Big(\frac{p}{\alpha + N}\Big)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p |x|^{\alpha+p}\, dx \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

En utilisant $|u|^p$ comme fonction test dans (1), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^p |x|^{\alpha} x\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha + N)|x|^{\alpha}|u|^p\, dx$$

$$p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}\nabla u |x|^{\alpha} x\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha + N)|x|^{\alpha}|u|^p\, dx$$

Par l'inégalité de Hölder

$$(\alpha + N)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha}|u|^p\, dx \leq p\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p |x|^{\alpha}\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^{\alpha}\, dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p |x|^{\alpha}\, dx \leq \Big(\frac{p}{\alpha + N}\Big)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p |x|^{\alpha+p}\, dx \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)..... \qquad \textbf{(02 points)}$$

II. On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda \dfrac{u}{|x|^2} + u_+^p & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (5)$$

Où $1 < p < 2^* - 1$, $0 < \lambda < \Big(\dfrac{N-2}{2}\Big)^2$, $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$.

1. Fixer le cadre fonctionnel de la solution $H_0^1(\Omega)$. (**0.5 point**)
2. Donner la formulation variationnelle du problème (5).

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v\, dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{u}{|x|^2} v\, dx - \int_{\Omega} u_+^p v\, dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).\textbf{(01 point)}$$

3. Montrer qu'il existe une solution faible $u$ du problème (5). En utilisant le Lemme du col : On démontre l'existence d'un point critique "maximum" tel que $c = \min\max J(v(\gamma(t)))$. Donc il faut vérifier les conditions géométrique de Mountain-Pass, ainsi que les condition de Compacité de Palais-Smale. (**03.5= 2+ 1.5 points**)
   **N.B :** Pour $p = 2, \alpha = -p = -2,$, on peut utiliser l'inégalité de Hardy-Sobolev :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq \Big(\frac{2}{N-2}\Big)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\, dx \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

4. Démontrer que la solution $u$ est positive. En utilisant $u_-$ comme fonction test dans (5), on obtient que $u_- = 0$ presque partout et par suite $u = u_+ \geq 0$.... ( **01 point**)