Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 2.
Module : *Théorie Spectrale* - Épreuve de Contrôle continu.
Jeudi 13/04/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (10pts) On considère l'espace de Banach $X = C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit l'opérateur linéaire suivant :

$$(Tx)(t) = x(0) + \int_0^t (t-s)\, x(s)\, ds \qquad \text{pour } \ x \in X.$$

1. Montrer que T est continu, puis calculer sa norme.
2. Montrer que T est compact.
3. Déterminer le spectre de T.
4. En déduire le rayon spectral de T.

Exercice 2 : (10pts) On considère l'espace de Hilbert $H = \ell_2(\mathbb{C})$ avec le produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \overline{y}_n$ et la norme associée. On définit l'opérateur linéaire T par

$$T(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \ldots) \quad \text{ou encore} \quad (Tx)_n = \frac{x_n}{2^n}.$$

1. Montrer que T est continu, puis calculer sa norme.
2. Montrer que T est auto-adjoint.
3. On définit les opérateurs T_k , $k \in \mathbb{N}$ par

$$(T_k x)_n = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2^n} & \text{si } \ n \leq k \\ \\ 0 & \text{si } \ n > k \end{cases}$$

   Montrer que les T_k sont compacts.
4. En majorant convenablement $\|(T - T_k)x\|$, montrer que $\lim_{k \to +\infty} \|T - T_k\| = 0$.
5. En déduire que T est compact.
6. Déterminer le spectre de T.

Master 1 EDP – Semestre 2 – Année Univ. 2022/2023

Module "Théorie Spectrale" – Contrôle continu – Corrigé.

Exercice 1 : (10 pts) $X = C([0,1];\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |x(t)|$

$$(Tx)(t) = x(0) + \int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds \quad \text{pour } x \in X.$$

1/ T est continu : T est manifestement linéaire. On a

$$|(Tx)(t)| \le |x(0)| + \int_0^t (t-s)\,|x(s)|\,ds$$

Comme $|x(0)| \le \|x\|_\infty$ et $|x(s)| \le \|x\|_\infty$, alors

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &\le \|x\|_\infty \left[1 + \int_0^t (t-s)\,ds\right] \\ &\le \|x\|_\infty \left[1 + \left[-\frac{(t-s)^2}{2}\right]_0^t\right] \\ &\le \|x\|_\infty \left[1 + \frac{t^2}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|Tx\|_\infty \le \|x\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{0\le t\le 1}\left(1 + t^2/2\right)}_{= 3/2}$$

L'inégalité $\|Tx\|_\infty \le \frac{3}{2}\|x\|_\infty$ indique que T est continu. De plus on a $\|T\| \le 3/2$. 2pts

Il est facile de remarquer que pour la fonction particulière $x_0(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$ on a : $\|x_0\|_\infty = 1$ et $(Tx_0)(t) = 1 + t^2/2$ d'où $\|Tx_0\|_\infty = 3/2$. Donc la valeur $\frac{3}{2}$ est atteinte dans l'expression $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. D'où $\boxed{\|T\| = 3/2}$ 1pt

2°/ T est compact : Ceci résulte de l'application du théorème d'Ascoli-Arzèlà. En effet, montrons que $T(\overline{B}_X(0,1))$ est relativement compact. C'est un ensemble borné car T est continu. Il reste à montrer qu'il est uniformément équicontinu.

$$(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2) = \int_0^{t_1} (t_1 - s) x(s)\, ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s) x(s)\, ds$$
$$= \int_0^{t_1} (t_1 - t_2) x(s)\, ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) x(s)\, ds$$

Supposons que $t_1 \leq t_2$. Alors

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \int_0^{t_1} |x(s)|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) |x(s)|\, ds$$
$$\leq \|x\|_\infty |t_1 - t_2| \cdot \underbrace{t_1}_{\leq 1} + \|x\|_\infty \left[- \frac{(t_2 - s)^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2}$$
$$\leq \|x\|_\infty |t_1 - t_2| + \|x\|_\infty \frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2$$
$$\leq \|x\|_\infty |t_1 - t_2| \left[1 + \frac{1}{2} \underbrace{(t_2 + t_1)}_{\leq 2} \right]$$
$$\leq 2 \|x\|_\infty |t_1 - t_2| \quad \text{Or } \|x\|_\infty \leq 1$$

alors $|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq 2 |t_1 - t_2|$. (ceci est vrai même si $t_1 \geq t_2$ en échangeant t_1 et t_2)

En prenant $\delta_\varepsilon = \varepsilon/2$ on aura : $|t_1 - t_2| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq \varepsilon$.

cqfd.

2pts

3°/ Spectre de T : Comme T est compact, alors $0 \in \sigma(T)$. Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, λ est une valeur propre. Ici le spectre est réel car l'espace X est réel.

$$\lambda x(t) = (Tx)(t) = x(0) + \int_0^t (t - s) x(s)\, ds \Rightarrow \lambda x(0) = x(0)$$

Deux cas se présentent : $x(0) = 0$ ou bien (si $x(0) \neq 0$) $\lambda = 1$.

Cas $\lambda \neq 1$: alors $x(0) = 0$. Aussi $\lambda x'(t) = + \int_0^t x(s)\, ds$

Car avec x continue, la fonction $(t-s)x(s)$ est continue et $\int_0^t (t-s) x(s)\, ds$ est dérivable.

On peut continuer la dérivation et obtenir $\boxed{\lambda x''(t) = x(t)}$

C'est une équation du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 = 1/\lambda$.

* Si $\lambda > 0$: $r = \pm 1/\sqrt{\lambda}$ et $x(t) = C_1 \operatorname{ch}(t/\sqrt{\lambda}) + C_2 \operatorname{sh}(t/\sqrt{\lambda})$

avec $x(0)=0$, on aura $C_1 = 0$. De plus $\lambda x'(0) = 0 \Rightarrow x'(0) = 0$ car $\lambda \neq 0$. Donc $x'(t) = \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ch}(t/\sqrt{\lambda}) \Rightarrow x'(0) = \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

d'où $x(t) \equiv 0$. Ceci montre que $\lambda > 0$ ne peut pas être une v.p.

* Si $\lambda < 0$: $r = \pm i/\sqrt{-\lambda}$ et $x(t) = C_1 \cos(t/\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(t/\sqrt{-\lambda})$

$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ et $x(t) = C_2 \sin(t/\sqrt{-\lambda})$ mais $x'(t) = \frac{C_2}{\sqrt{-\lambda}} \cos(t/\sqrt{-\lambda})$ et $x'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. La même conclusion ici aussi.

En définitive si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, λ ne peut pas être dans le spectre.

Cas $\lambda = 1$: $x(0)$ est alors q-q. L'équation différentielle est la même :

$x''(t) = x(t)$, $r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$ et $x(t) = C_1 \operatorname{ch}(t) + C_2 \operatorname{sh}(t)$

$x(0) = C_1$ et $x'(t) = C_1 \operatorname{sh}(t) + C_2 \operatorname{ch}(t)$, d'où $x'(0) = 0 = C_2$

donc $x(t) = x(0) \operatorname{ch}(t)$ 1 est une v.p. associée à la fonct. propre $\operatorname{ch}(t)$

Ainsi $\boxed{\sigma(T) = \{0, 1\}}$. 4pts

4/ Rayon spectral : De par sa définition, le rayon spectral est le rayon du plus petit intervalle centré en 0 fermé (car X est réel) contenant le spectre. Donc $\boxed{r(T) = 1}$ 1pt

Exercice 2 : (10pts) $H = \ell_2(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y}_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |x_n|^2.$$

$$T : H \longrightarrow H \quad \text{avec} \quad (Tx)_n = \frac{x_n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1°/ T est continu : T est manifestement linéaire. Alors

$$|(Tx)_n| = \frac{|x_n|}{2^n} \leq |x_n| \Rightarrow |(Tx)_n|^2 \leq |x_n|^2$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_H \leq \|x\|_H \quad \forall x \in H$$ 1pt

ceci donne déjà la continuité. De plus $\|T\| \leq 1$.

En considérant la suite particulière $x^0 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, on aura $\|x^0\|_H = 1$ et $Tx^0 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) = x^0 \Rightarrow \|Tx^0\|_H = 1$ aussi

Donc $\boxed{\|T\| = 1}$. 1pt

2°/ T est auto-adjoint : $\langle Tx, y \rangle = \sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{2^n} \cdot \overline{y}_n = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{\left(\frac{y_n}{2^n}\right)}$

d'où $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \ \forall x, y \in H$. 1pt

3°/ Compacité des T_k : $(T_k x)_n = \begin{cases} x_n/2^n & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$

Notons $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{ième place}}}{1}, 0, \dots, 0, \dots)$. Alors il est clair que

$$T_k x = \sum_{n=0}^{k} \frac{x_n}{2^n} e_n \quad , \forall x \in H.$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(T_k) \subset \mathrm{Vect}\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ l'espace engendré par les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_k$. Donc $\dim \mathrm{Im}(T_k) \leq k+1$. 2pts

Comme T_k est de rang fini et continu (facile) alors T_k est compact. (Pour la continuité de T_k, $\|T_k x\| \leq \|x\|$, comme pour T).

4°/ T est limite des T_k :

$$\left(\left(T-T_k\right)(x)\right)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ \frac{x_n}{2^n} & \text{si } n > k. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \|(T-T_k)(x)\|_H^2 \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{4^n} \quad \text{or } \forall n, \ |x_n|^2 \leq \|x\|_H^2$$

$$\text{donc } \|(T-T_k)(x)\|_H^2 \leq \|x\|_H^2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

Rappelons que $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{k+1}} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{4^j}$ (en posant $j = n-(k+1)$)

$$= \frac{1}{4^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3 \cdot 4^k}.$$

Donc $\|(T-T_k)(x)\|_H^2 \leq \frac{1}{3\cdot 4^k} \cdot \|x\|^2 \Longrightarrow \|(T-T_k)x\|_H \leq \frac{\|x\|_H}{\sqrt{3}\cdot 2^k}$.

D'où $\boxed{\|T-T_k\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 2^k}}$

Ceci montre bien que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|T-T_k\|_{\mathcal{L}(H)} = 0$.

5°/ T est compact : T est limite forte (dans $\mathcal{L}(H)$) d'une suite d'opérateurs compacts (les T_n), donc T est cpact (cours) 1pt

6°/ Spectre de T : On sait que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ car T est auto-adjoint. Aussi $0 \in \sigma(T)$ car T est compact. De plus chaque $\frac{1}{2^n}$ est une valeurs propre car $Te_n = \frac{1}{2^n} \cdot e_n$ (e_n introduit dans la 3°/ question).

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0, \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Notons $d_\lambda = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda - \frac{1}{2^n}|$ et $\delta_\lambda = \min(d_\lambda, |\lambda|)$. Considérons l'éq $(\lambda I - T)x = y \Leftrightarrow \lambda x_n - \frac{x_n}{2^n} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ 2pts

ou encore $(\lambda - \frac{1}{2^n}) x_n = y_n \Rightarrow x_n = \frac{1}{\lambda - 1/2^n} y_n \Rightarrow |x_n| \leq \frac{1}{\delta_\lambda} |y_n|$

Ceci prouve que cette équation possède une solution $x \in H$ unique, car $\lambda I - T$ est inversible ou encore $\lambda \in \rho(T)$.

Donc $\boxed{\sigma(T) = \left\{0, \frac{1}{2^n} / n \in \mathbb{N}\right\}}$

2pts