Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Mars 2023.
Th. Eléments finis. (Master1-EDP_S2)

Epreuve de contrôle continu

(durée : 2 h)

Cadre théorique fonctionnel [**04pts**]

Dans **R**, étant donnés trois réels distincts: a, b et c tels que $a < c < b$ et soit $v \in C([a,b])$ t.q. $v|_{]a,c[} \in H^1(\,]a,c[\,)$ et $v|_{]c,b[} \in H^1(\,]c,b[\,)$, alors :

1) Montrer que $v \in L^2(\,]a,b[\,)$ par le calcul intégral. (**1pt**)
2) Soit Dv une fonction définie sur]a,b[t.q. $Dv|_{]a,c[} = v'|_{]a,c[}$ et $Dv|_{]c,b[} = v'|_{]c,b[}$ (Ici on note par v' la dérivée au sens des distributions de v sur]a,c[et sur]c,b[ ). Montrer alors que $Dv \in L^2(\,]a,b[\,)$. (**1pt**)
3) Montrer que Dv n'est autre que la dérivée au sens des distributions (notée v') de v sur]a,b[et déduire que $v \in H^1(\,]a,b[\,)$. (**2pts**)

Approximation variationnelle [**16 pts**]

V étant un R_espace de Hilbert, on considère alors le PVG (P) :Trouver $u \in V$ t.q. $\forall\ v \in V$ $a(u , v) = L(v)$ où a est une forme bilinéaire continue sur VxV, V-elliptique et L est une forme linéaire continue sur V. On introduit alors le PAVG (P_h) : Trouver $u_h \in V_h$ t.q. $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$ où V_h est un sous-espace de dimension finie d'approximation de V. On suppose que $\dim V_h = N$ et u_h est la solution unique de (P_h).

a) Montrer que (P_h) est équivalent à un système linéaire carré noté (SL_h) : $\sum_{i=1}^{N} a(\varphi_i , \varphi_j)\ \alpha_i = L(\varphi_j)\ \ 1 \le j \le N$

où $\{\varphi_1 ,... ,\varphi_N\}$ base de V_h et α_i (i = 1,…,N) coordonnées de u_h dans la base de V_h . (**2pts**)

b) (SL_h) étant un système linéaire carré (N équations à N inconnues α_i (i=1,…,N)), montrer qu'il est inversible.

Rappel : Le système matriciel Ax = b est inversible $\Leftrightarrow$ $Ax = 0_N = (0,\dots,0)^T$ admet comme seul et unique vecteur-solution, le vecteur nul 0_N (l'origine de R^N). (**2pts**)

Indication : Utiliser la V_ellipticité de la forme bilinéaire 'a'.

c) En déduire que le PAVG (P_h) admet une solution unique $u_h \in V_h$. (**1pt**)

d) On pose $w_h = v_h - u_h$ où v_h quelconque dans V_h. Après avoir vérifié que w_h se trouve également dans V_h , montrer que $a(u , w_h) = L(w_h) = a(u_h , w_h)$. (**1.5pts**)

e) En déduire que $a(u - u_h , w_h) = 0$. (**1pt**)

f) Montrer alors que $a(u - u_h , u - u_h) = a(u - u_h , u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h$. (**1pt**)

g) Utilisant la continuité de 'a' sur VxV et sa V_ellipticité, montrer que

$\alpha_a \|u - u_h\|_V^2 \le M_a \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h$ où α_a est la constante de V_ellipticité de 'a' et M_a est la constante de continuité de la forme bilinéaire 'a'. (**1pt**)

h) En déduire l'inégalité : $\|u - u_h\|_V \le \dfrac{M_a}{\alpha_a} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$. (**1pt**)

i) D'un point de vue géométrique (par rapport à u et V_h), que représente la quantité : $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$. (**0.5pt**)

j) Sous quelle condition supplémentaire le P.V.G. (P) pourra être écrit ou posé sous forme d'un problème d'optimisation noté (P_{min}) : $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$ où $J(v) = \dfrac{1}{2} a(v,v) - L(v)$? (**1pt**)

k) Dans le cas où cette condition est vérifiée (dans la question **j**)), on considère alors le sous-espace de dim finie $V_m = Vect(e_1,\dots,e_m)$ de V pour $m \in N^*$ où $\{e_1,\dots,e_m\}$ base orthonormale de V_m t.q. $V = \overline{\bigcup_{m\geq 1} V_m}$.

On définit alors sur chaque s.e.v. V_m , le PAVG (P_m) : $a(u_m , v) = L(v) \quad \forall v \in V_m$ et u_m est la solution unique de (P_m).

k1) Utilisant les questions précédentes, montrer que : Résoudre (P_m) équivaut à résoudre $(P_{m,min})$:
$J(u_m) = \min_{v\in V_m} J(v)$. (**1pt**)

k2) Montrer que la suite $\{J(u_m)\}_{m\geq 1}$ est décroissante dans **R**. (**1pt**)
Rappel : $J : F \to \mathbf{R}$, $E \subset F$ et $\inf_{v\in E} J(v)$, $\inf_{v\in F} J(v)$ existent $\Rightarrow \inf_{v\in F} J(v) \leq \inf_{v\in E} J(v)$.

k3) Montrer que $\lim J(u_m) = J(u)$ quand $m \to \infty$. (**1pt**)

Rappels : **1**. Lorsque la condition supplémentaire de la question **j**) est vérifiée, si u est la solution unique du PVG (P) alors u est aussi solution optimale unique de (P_{min}) introduit à la question **j**).
2. D'après les théorèmes de convergence, $u_m \to u$ dans V quand $m \to \infty$.
3. Pour $m \geq 1$ $V_m = Vect(e_1,\dots,e_m) \subset V_{m+1} = Vect(e_1,\dots,e_m,e_{m+1})$.

k4) Comment s'appelle la méthode qui consiste à approcher la solution théorique u du PVG (P) par les termes de la suite (u_m) pour m assez grand, u_m étant la solution unique du PAVG (P_m). (**1pt**)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Mars 2023.
Th. Eléments finis. (Master1-EDP_S2)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

Cadre théorique fonctionnel

$a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $a<c<b$ et $v \in \mathcal{C}([a,b])$ t.q. $v|_{]a,c[} \in H^1(]a,c[)$ et $v|_{]c,b[} \in H^1(]c,b[)$

1) $\int_a^b v^2 dx = \int_a^c v^2 dx + \int_c^b v^2 dx = \|v|_{]a,c[}\|^2_{L^2(]a,c[)} + \|v|_{]c,b[}\|^2_{L^2(]c,b[)} < +\infty$

car $v|_{]a,c[} \in L^2(]a,c[)$ et $v|_{]c,b[} \in L^2(]c,b[)$. Donc $v \in L^2(]a,b[)$. (1pt)

2) $Dv :]a,b[\to \mathbb{R}$ t.q. $Dv|_{]a,c[} = v'|_{]a,c[}$ et $Dv|_{]c,b[} = v'|_{]c,b[}$

$$\int_a^b (Dv)^2 dx = \int_a^c (Dv)^2 dx + \int_c^b (Dv)^2 dx = \int_a^b v'|^2_{]a,c[} dx + \int_c^b v'|^2_{]c,b[} dx$$

$$= \|v'|_{]a,c[}\|^2_{L^2(]a,c[)} + \|v'|_{]c,b[}\|^2_{L^2(]c,b[)} < +\infty \quad \text{(1pt)}$$

car $v'|_{]a,c[} \in L^2(]a,c[)$ et $v'|_{]c,b[} \in L^2(]c,b[)$. Donc $Dv \in L^2(]a,b[)$.

3) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ $\langle Dv, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_a^b Dv.\varphi\, dx = \int_a^c v'|_{]a,c[}.\varphi\, dx + \int_c^b v'|_{]c,b[}.\varphi\, dx$

$$= \int_a^c v'\varphi\, dx + \int_c^b v'\varphi\, dx \quad \text{(0,25pt)}$$

$$= [v\varphi]_a^c - \int_a^c v\varphi' dx + [v\varphi]_c^b - \int_c^b v\varphi' dx \quad \text{(0.25pt)}$$

$$= \left(v|_{[a,c]}(c)\varphi(c) - v(a)\varphi(a)\right) - \int_a^c v\varphi' dx + \quad \text{(0.50pt)}$$

$$\left(v(b)\varphi(b) - v|_{[c,b]}(c)\varphi(c)\right) - \int_c^b v\varphi' dx$$

$$= -\int_a^c v\varphi' dx - \int_c^b v\varphi' dx = -\int_a^b v\varphi' dx \quad \text{(0.50pt)}$$

$$= -[v\varphi]_a^b + \int_a^b v'\varphi\, dx = \int_a^b v'\varphi\, dx = \langle v', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

$v \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow v|_{[a,c]}(c) = v|_{[c,b]}(c)$

et $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$

$\langle Dv, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle v', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

Conclusion : $Dv = v'$ au sens des distributions dans $]a,b[$.

Par ailleurs, d'après 1) et 2), $v \in L^2(]a,b[)$ et $v' = Dv \in L^2(]a,b[)$.
On en déduit alors que $v \in H^1(]a,b[)$. (0,5pt)

Approximation variationnelle

a) On montre que $(P_h) \Leftrightarrow (SL_h)$ et on commence par $(P_h) \Rightarrow (SL_h)$:

Ds le P.A.V.G. (P_h) : $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ $\forall v_h \in V_h = Vect(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$

$\Rightarrow a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j)$ $\forall j = \overline{1,N}$ puisque $\forall j = \overline{1,N}$ $\varphi_j \in V_h$. (0,5pt)

Or $u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \Rightarrow a\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\varphi_i, \varphi_j\right) = L(\varphi_j)$ pour $j = \overline{1,N}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i = L(\varphi_j)$ pour $j = \overline{1,N}$ (SL_h). (0,5pt)

Inversement, si on a (SL_h) alors $\forall \{\beta_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$ $\exists v_h \in V_h / v_h = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j$ et $\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_i \beta_j = \beta_j L(\varphi_j)$ pour $j = \overline{1,N} \Rightarrow a(\underbrace{\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i}_{u_h}, \varphi_j)\beta_j = L(\beta_j \varphi_j)$ pour $j = \overline{1,N}$

$\Rightarrow a(u_h, \beta_j \varphi_j) = L(\beta_j \varphi_j)$ par $j = 1 \ldots N$. (0,5pt

En sommant membre à membre, on obtient $a(u_h, \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j) = \sum_{j=1}^N L(\beta_j \varphi_j)$

c.à d. $a(u_h, v_h) = L\left(\sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j\right) = L(v_h)$ $\forall v_h \in V_h$. (P_h) (0,5pt

$\{\beta_j\}_{j=1}^N$ étant arbitraire ds $\mathbb{R} \Rightarrow v_h$ est aussi arbitraire ds V_h.

b) Sous forme matricielle (SL_h) s'écrit comme suit :

$AU = b$ où $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))^T_{1\le i,j\le N} = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1\le i,j\le N}$, $U = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_N\end{pmatrix} = (\alpha_i)_{i=1}^N$ et $b = (L(\varphi_j))_{j=1}^N$

$AU = b$ admet une solution unique $U \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow AV = O_N$ (où $O_N = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N \text{ fois}})^T$) admet comme seul vect.-solution le vecteur nul de $\mathbb{R}^N$: O_N (l'origine de $\mathbb{R}^N$). (0.25pt

On suppose alors que $V = (\beta_1, \ldots, \beta_N)^T$ et on considère $v_h \in V_h$ t.q. $v_h = \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j$. On obtiendra donc, en vertu de la V-ellipticité de 'a' : $0 \le \alpha_a \|v_h\|_V^2 \le a(v_h, v_h) = a\left(\sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j\right) = \sum_{i,j=1}^N \beta_i \beta_j a(\varphi_i, \varphi_j)$ $(*)$

$\alpha_a > 0$ étant la constante de V-ellipticité de 'a'. (0,5pt

D'un autre côté, le syst. matriciel homogène $AV = O_N$ s'écrit sous forme d'un syst. lin. comme suit : $\left\{\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\beta_i = 0\right.$ pour $j = \overline{1,N}$. (0.25pt

En multipliant chacune des équations linéaires ci-dessus par β_j en respectant l'indice correspondant c.à d.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_1)\beta_i \beta_1 = 0\beta_1 = 0 \\ \text{---} \\ \left.\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\beta_i \beta_j = 0\beta_j = 0\right\} \text{pour } j = \overline{2, N-1}, \\ \text{---} \\ \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_N)\beta_i \beta_N = 0\beta_N = 0 \end{cases}$$

(0,5pt

et en sommant membre à membre, on obtient : $\sum_{i,j=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\beta_i\beta_j = 0$ $(**)$.

Par conséquent, d'après $(*)$ et $(**)$, on peut écrire que :

$0 \le \alpha_a \|v_h\|_V^2 = \alpha_a \left\|\sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i\right\|^2 \le a(v_h, v_h) = \sum_{i,j=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j)\beta_i\beta_j = 0$ (0,5pt

$\Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i\right\|_V = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i = O_V \Rightarrow \beta_i = 0$ $\forall i = \overline{1,N}$

car $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ base de $V_h \Rightarrow V = O_N = (0, \ldots, 0)^T$ (l'origine de $\mathbb{R}^N$)

c) D'après b), (SL_h) inversible $\Rightarrow$ (SL_h) admet une solution unique $U=(\alpha_i)_{i=1}^N$ où α_i $(i=\overline{1,N})$ coefficients de la combinaison lin. de u_h dans la base de V_h $\left(\mathcal{B}_{V_h}=\{\varphi_i\}_{i=1}^N\right)$. D'un autre côté, d'après a), $(SL_h)\Leftrightarrow(P_h)$ ce qui prouve que $u_h=\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i$ solution unique de (P_h). (1pt

d) $w_h = v_h \overset{0.25}{-} u_h \in V_h$ car V_h $\overset{0.25}{\text{s.e.v. de}}$ $V \Rightarrow a(u,w_h)=L(w_h)$ car u sol. de (P) et $a(u_h,w_h)=L(w_h)$ car u_h solution de (P_h) et $w_h\in V_h$ (0.5pt (0.5pt

e) D'après d), $a(u,w_h)=a(u_h,w_h) \Longrightarrow a(u-u_h,w_h)=0$. (1pt

f) v_h étant arbitraire ds V_h, on a alors $\forall v_h\in V_h$ $a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,\underbrace{\quad}_{u-v_h+v_h-u_h})$
(1pt c.à.d. $a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,\underbrace{v_h-u_h}_{w_h})=a(u-u_h,u-v_h)$
car, d'après e), $a(u-u_h,v_h-u_h)=a(u-u_h,w_h)=0$. Dc $a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)$ $\forall v_h\in V_h$

g) "a" étant V-elliptique $\Rightarrow a(u-u_h,u-u_h)\geqslant \alpha_a\|u-u_h\|_V^2$
(1pt "a" étant continue sur $V\times V \Rightarrow a(u-u_h,u-v_h)\leqslant M_a\|u-u_h\|\cdot\|u-v_h\|$ $\forall v_h\in V_h$.
D'où le résultat : $\alpha_a\|u-u_h\|_V^2\leqslant a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)\leqslant M_a\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V$ $\forall v_h$.

h) D'après g), $\|u-u_h\|_V\leqslant \frac{M_a}{\alpha_a}\|u-v_h\|_V$ $\forall v_h\in V_h$ $\Rightarrow \|u-u_h\|_V\leqslant\frac{M_a}{\alpha_a}\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$. (1pt

i) La quantité $\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$ (infimum des distances qui sépare u des vecteurs v_h de V_h.) représente la distance séparant $u\in V$ du s.e.v. V_h. (0.5pt
Remarque : Cette quantité est nulle si $u\in V_h$.

j) (P) peut être écrit sous la forme (P_{min}) si la forme bilinéaire (1pt "a" est, de plus, symétrique (t.q. $a(v,w)=a(w,v)$ $\forall(v,w)\in V^2$)

k)
k1) u_m étant la solution unique de (P_m): $a(u_m,v)=L(v)$ $\forall v\in V_m$ représentant l'équation d'Euler associé au pb d'optimisation sans contraintes $(P_{m,min})$: $\inf_{v\in V_m} J(v)$ (puisque $\langle J'(u_m),v\rangle=a(u_m,v)-L(v)=0$ $\forall v\in V_m$) et comme J est convexe sur V_m (car J convexe sur $V\supset V_m$), alors : $(P_m)\Leftrightarrow(P_{m,min})$ et u_m est aussi la solution optimale unique de $(P_{m,min})$: $J(u_m)=\inf_{v\in V_m}J(v)$. (1pt

k2) La suite $(J(u_m))_{m\geqslant1}$ est décroissante dans $\mathbb{R}$ puisque $V_m \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} V_{m+1}$ par construction même des sous-espaces V_m:
$V_m=\text{Vect}(e_1,\dots,e_m)\subset\text{Vect}(e_1,\dots,e_m,e_{m+1})=V_{m+1}$. (1pt
Par conséquent $J(u_{m+1})=\inf_{v\in V_{m+1}}J(v)\leqslant\inf_{v\in V_m}J(v)=J(u_m)$ (Voir indication).
Donc $J(u_{m+1})\leqslant J(u_m)$.

k3) D'après les thms de convergence, $u_m \to u$ ds V qd $m \to \infty$ et J est continue de V ds $\mathbb{R}$ $\Rightarrow J(u_m) \to J(u)$ qd $m \to \infty$. (1pt

k4) C'est la méthode de Galerkin appelée aussi méthode de Ritz-Galerkin. (1pt