Université de Tlemcen A.U. 2022/2023
Faculté des sciences
Département de mathématiques
1ère année: master EDP

Controle: Méthodes de résolutions des équations elliptiques
Durée: 1h30

Exercice 1

On considère le problème suivant

$$(1)\begin{cases} -\triangle u+u=\dfrac{1}{1+u_{+}} & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$ et $u_{+}=\max(0,u)$.

1/ Donner la formulation variationnelle du problème (1), montrer que tout les termes sont bien définis dans l'espace de Sobolev (à déterminer).

2/ Trouver la fonctionnelle d'énergie associée à (1) (qu'on notera J)

3/ Montrer que si $m=\inf\limits_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u)$, alors $|m|<\infty$ et que m est atteint.

4/Déduire que le problème (1) a une solution.

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, A une application de Ω dans l'ensemble des matrices symétriques satisfaisant :

i/ Il existe $\beta>0$ telle que, presque partout dans Ω, $|A(x)\zeta.\zeta|\leq\beta|\zeta|^2$ pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^n$.

ii/ Il existe $\alpha>0$ telle que $A(x)\zeta.\zeta\geq\alpha|\zeta|^2$ pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^n$.

Soit $f\in L^2(\Omega)$, considérons le problème aux limites suivant

$$(2)\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u)=f & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

1/ Donner la formulation variationnelle associée au problème (2).

2/ Montrer que le problème admet une unique solution faible.