Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2022-2023.

Master I : EDP et Applications
Module : Analyse Fonctionnelle II
Durée : 2h00

Contrôle Continu

Exercice-01 : **(07 points)**

I- On définit l'espace V par :

$$V = \left\{ u \in W^{1,2}(0,1) \text{ tel que } u(1) = 0 \right\}$$

1. Prouver que V est un espace vectoriel fermé de $W^{1,2}(0,1)$ **(01 point)**.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : pour tout $u \in V$, on a
$$\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2.$$ **(01.5 points)**
3. Déduire que $\|u'\|_2$ est une norme sur V équivalente à la norme induite par $W^{1,2}(0,1)$ **(01 point)**

II- Soit $u \in W^{1,p}(I\!R)$,

1. Démontrer que pour tout $p > 1$
$$|u(x)|^p \leq p\|u\|_p^{p-1}\|u'\|_p \qquad \text{pour tout } x \in I\!R$$ **(02points)**
(on peut utiliser la densité de $C_0^\infty(I\!R)$ dans $W^{1,p}(I\!R)$).
2. Déduire que $u \in L^\infty(I\!R)$ et que
$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I\!R)}.$$ **(01.5 points)**
où C est une constante universelle (indépendante de p).

Exercice-02 : **(05 points)**

Soit I un intervalle borné. Soit $1 \leq r \leq \infty$ et $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que : pour tout $u \in W^{1,p}(I)$ et pour tout $p > 1$, on a
$$\|u\|_p \leq C\|u\|_q^{1-a}\|u\|_{W^{1,r}}^a \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,r}(I).$$ **(03 points)**
Où $0 \leq a \leq 1$ est défini par : $a\Big(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r} + 1\Big) = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.
2. Déduire que en particulier si $p < \infty$ alors
$$\forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, \qquad \|u\|_p \leq \epsilon\|u\|_{W^{1,r}} + C_\epsilon\|u\|_q \qquad \forall u \in W^{1,r}(I).$$ **(02 points)**

Exercice-03 : **(08 points)**

On considère le problème suivant : '

$$\begin{cases} -u'' &= f(x) - u & \text{sur }]0,1[\\ u(0) &= u(1), & u'(1) - u'(0) = k. \end{cases} \tag{1}$$

Où $k \in I\!R$, et f est donnée.

1. Trouver la formulation faible du problème (3) **(02 points)**.
2. Montrer que pour tout $f \in L^2(0,1)$ et pour tout $k \in I\!R$ il existe une solution unique faible du problème (3). Quel est le problème de minimisation correspondant ? **(03 points)**

3. N'importe qu'elle solution faible u appartient à $H^2(0,1)$. Vérifier que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. **(01.5 points)**
4. Démontrer que $u \leq 0$ sur $(0,1)$ si $f \leq 0$ sur $(0,1)$ et $k \leq 0$. **(01.5 points)**

Bonne chance.

Corrigé

Exercice-01 : **(07 points)**

I- On définit l'espace V par :

$$V = \Big\{ u \in W^{1,2}(0,1) \text{ tel que } u(1) = 0 \Big\}$$

1. Prouver que V est un espace vectoriel fermé de $W^{1,2}(0,1)$ (clair).
   Pour la fermeture prenant une suite $(u_n)_n$ convergente dans V et on démontre que sa limite u dans V en utilisant l'injection avec $\mathcal{C}(0,1)$ alors $u \in V$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : pour tout $u \in V$, on a

$$\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2.$$

   On sait que :

$$|u(x)| \leq |\int_x^1 u'(s)ds| \leq \|u'\|_2 \qquad \text{pour tout } x \in I\!R.$$

   D'où le résulat
3. Déduire que $\|u'\|_2$ est une norme sur V équivalente à la norme induite par $W^{1,2}(0,1)$.

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_2 + \|u'\|_2 \leq C\|u\|_\infty + \|u'\|_2 \leq C_1\|u'\|_2 + \|u'\|_2 \leq C_2\|u'\|_2$$

II- Soit $u \in W^{1,p}(I\!R)$,

1. Démontrer que pour tout $p > 1$
   On pose $G(s) = |s|^{p-1}s$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty_{/}(0,1)$, alors $(G(u))' = u'G'(u) = pu'|u|^{p-1}$ donc, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|u_n(x)|^p = p\int_0^x u_n'(s)|u_n(s)|^{p-1}ds \leq p\|u_n\|_p^{p-1}\|u'\|_p \qquad \text{pour tout } x \in I\!R.$$

   On passe par densité, donc on obtient

$$|u(x)|^p \leq p\|u\|_p^{p-1}\|u'\|_p \qquad \text{pour tout } x \in I\!R$$

2. Déduire que $u \in L^\infty(I\!R)$ et que

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I\!R)}.$$

   où C est une constante universelle (indépendante de p).
   Par l'inégalité de Young on trouve

$$|u(x)|^p = \leq p\Big(\frac{1}{p}\|u'\|_p^p + \frac{p-1}{p}\|u\|_p^p\Big) \leq \Big(\|u'\|_p^p + (p-1)\|u\|_p^p\Big) \leq C\Big(\|u'\|_p^p + \|u\|_p^p\Big)$$

   Donc

$$|u(x)| \leq C'\|u\|_{W^{1,p}(I\!R)}$$

   D'où le résultat

Exercice-02 : **(05 points)**

Soit I un intervalle borné. Soit $1 \leq r \leq \infty$ et $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que : pour tout $u \in W^{1,p}(I)$ et pour tout $p > 1$, on a $G(s) = |s|^{\frac{1}{a}-1}s$ est une fonction $\mathcal{C}^{\infty}(\prime, \infty)$, alors $(G(u))' = u'G'(u) = \frac{1}{a}u'|u|^{\frac{1}{a}-1}$ donc

$$|u(x)|^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}\int_0^x u'(s)|u(s)|^{\frac{1}{a}-1}ds \le \Big(\int_0^x |u'(s)|^r ds\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_0^x |u(s)|^{r'\frac{(1-a)}{a}} ds\Big)^{\frac{1}{r'}} \qquad \text{pour tout } x \in I\!R.$$

$$\le \|u\|_{W^{1,r}}\Big(\int_0^x |u(s)|^{q'} ds\Big)^{\frac{1-a}{q'a}}|1-x|^{1-\frac{1-a}{q'a}} \le C\|u\|_{W^{1,r}}\Big(\int_0^x |u(s)|^{q'} ds\Big)^{\frac{1-a}{q'a}}$$

On démontre $a\Big(\dfrac{1}{q'} - \dfrac{1}{r} + 1\Big) = \dfrac{1}{q'}$, où $q'a = r'(1-a)$

Donc

$$|u(x)| \le C_1\|u\|^a_{W^{1,r}}\|u\|^{1-a}_{q'}$$

Et par suite

$$\|u\|_\infty \le C_1\|u\|^a_{W^{1,r}}\|u\|^{1-a}_{q'}.$$

Maintenant pour $1 \le q \le p \le \infty$, on a

$$\|u\|_p \le C\|u\|_\infty.$$

et comme $a\Big(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r} + 1\Big) = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ on en déduit

$$\|u\|_p \le C\|u\|^{1-a}_q\|u\|^a_{W^{1,r}} \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,r}(I).$$

2. On applique l'inégalité de Young $\alpha = \frac{1}{a}, \alpha' = \frac{1}{1-a}$ on aura

$$\|u\|_p \le \epsilon_1\|u\|_{W^{1,r}} + C_\epsilon\|u\|_q \qquad \forall u \in W^{1,r}(I).$$

<u>Exercice-03</u> : **(08 points)**

On considère le problème suivant : ‘

$$\begin{cases} -u'' = f(x) - u & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1), & u'(1) - u'(0) = k. \end{cases} \qquad (2)$$

Où $k \in I\!R$, et f est donnée.

1. Trouver la formulation faible du problème (3).

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx + v(0)u'(0) - v(1)u'(1) = \int_0^1 fv\,dx \qquad \forall v \in H^1(0,1)$$

Soit

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v(0) = v(1)\}.$$

Si $v \in V$, on obtain :

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx + kv(0) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

2. Montrer que pour tout $f \in L^2(0,1)$ et pour tout $k \in I\!R$ il existe une solution unique faible du problème (3). Quel est le problème de minimisation correspondant ?

A l'aide du Théroème de Lax-Milgram on démontre qu'il existe une unique solution faible $u \in H$ qui vérifié le probleme (3), le problème de minimisation correspondant de la solution u est donnée par :

$$\min_{v\in V}\Big\{\frac{1}{2}\int_0^1 (v'^2 + v^2)\,dx - \int_0^1 fv\,dx - kv(0)\Big\}$$

3. N'importe qu'elle solution faible u appartient à $H^2(0,1)$ et satisfait '

$$\begin{array}{rcll} -u'' & + & u = f & \text{sur }]0,1[\\ u'(1)v(1) & - & u'(0)v(0) = kv(0), & \forall k \in V. \end{array} \tag{3}$$

c'est à dire

$$u'(1) - u'(0) = k$$

Vérifier que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ si $f = (u')' - u \in \mathcal{C}([0,1])$ alors $u' \in \mathcal{C}^1([0,1])$ donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$

4. Démontrer que $u \leq 0$ sur $(0,1)$ si $f \leq 0$ sur $(0,1)$ et $k \leq 0$. Par le principe de Maximum on démontre que $u \leq 0$

Bonne chance.