Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 1.
Module : *Calcul Différentiel et Intégral* - Épreuve de Rattrapage.
Mardi 20/06/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (10pts) Soit $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre n, muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A.x\|_2}{\|x\|_2}, \qquad \text{pour } \ A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$$

où $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne du vecteur x dans $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction $F : \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ définie par

$$F(X) = I + X + X^2 + X^3.$$

1. Calculer la différentielle de F en un point X_0, notée dF_{X_0}.
2. En déduire que si $\|X_0\| < \dfrac{1}{3}$, alors dF_{X_0} est inversible.

Exercice 2 : (10pts) On considère la sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

orientée selon la normale extérieure, et la $2-$forme différentielle suivante

$$\omega = z\,dx \wedge dy \ - \ x\,dy \wedge dz.$$

1. Calculer $\displaystyle\int_S \omega$.
2. Le résultat précédent était-il prévisible sans calcul ?

M1-EDP - Semestre 1 - 2022/2023.

Module: "Calcul différentiel et Intégral"

Rattrapage - Corrigé.

Exercice 1: (10 pts) $F : \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$

$$X \longmapsto F(X) = I + X + X^2 + X^3$$

1°/ Calcul de dF_{X_0} : On a

$$F(X_0+H) = I + (X_0+H) + (X_0+H)^2 + (X_0+H)^3$$

$$= I + X_0 + H + (X_0^2 + X_0H + HX_0 + H^2) +$$

$$(X_0^3 + X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2 + X_0H^2 + HX_0H + H^2X_0) + H^3$$

$$= F(X_0) + \left\{H + X_0H + HX_0 + X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2\right\}$$

$$+ \left\{H^2 + X_0H^2 + HX_0H + H^2X_0\right\} + H^3$$

Posons $dF_{X_0}(H) = H + X_0H + HX_0 + X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2$

Alors $F(X_0+H) - F(X_0) - dF_{X_0}(H) = R_{X_0}(H)$

où $R_{X_0}(H) = \left\{H^2 + X_0H^2 + HX_0H + H^2X_0\right\} + H^3$

En utilisant l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

on obtient : $\|R_{X_0}(H)\| \leq 3\|X_0\| \cdot \|H\|^2 + \|H\|^3$

d'où $$\frac{\|F(X_0+H) - F(X_0) - dF_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq \underbrace{3\|X_0\| \cdot \|H\| + \|H\|^2}_{\xrightarrow{\|H\| \to 0}\ 0}$$

Ceci montre bien que

$$\boxed{dF_{X_0}(H) = H + X_0H + HX_0 + X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2}$$ 5 pts

2°/ Inversibilité de dF_{X_0} : On a

$$dF_{X_0}(H) = \left(id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + S\right)(H) \text{ où}$$

$$S(H) = X_0H + HX_0 + X_0^2H + X_0HX_0 + HX_0^2 \text{ (linéaire en } H\text{)}.$$

On : $\|S(H)\| \leq 2\|X_0\|\cdot\|H\| + 3\|X_0\|^2\cdot\|H\|$

$$\Rightarrow \frac{\|S(H)\|}{\|H\|} \leq 2\|X_0\| + 3\|X_0\|^2$$

$$\Rightarrow \|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))} \leq 2\|X_0\| + 3\|X_0\|^2$$

Norme de l'opérateur S

Si $\|S\| < 1$ alors $id + S$ est inversible. Il suffit pour cela que $2\|X_0\| + 3\|X_0\|^2 < 1$. La solution de cette inégalité stricte est :

$$\begin{array}{ccccccc} + & 0 & - & & - & 0 & + \\ & -1 & & 0 & & 1/3 & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\boxed{\|X_0\| < 1/3,}$$

Signe de $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 < 0$. ($\lambda = \|X_0\|$).

Donc on a bien que si $\|X_0\| < 1/3$ alors dF_{X_0} est inversible. 5pts.

Exercice 2 : (10pts) $S = \{X \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $X = (x, y, z)$

$$\omega = z\, dx \wedge dy - x\, dy \wedge dz$$

1°/ Calcul de $\int_S \omega$: Paramétrisons S par $\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ 1pt

alors $\begin{cases} dx = (\cos\theta\cos\varphi)\, d\theta - (\sin\theta\sin\varphi)\, d\varphi \\ dy = (\cos\theta\sin\varphi)\, d\theta + (\sin\theta\cos\varphi)\, d\varphi \\ dz = (-\sin\theta)\, d\theta \end{cases}$ 2pts

D'où

$dx\wedge dy = (\sin\theta\cos\theta)\, d\theta\wedge d\varphi$

$dy\wedge dz = (\sin^2\theta\cos\varphi)\, d\theta\wedge d\varphi$

et donc

$$\int_S \omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\cos^2\varphi\right) d\theta\, d\varphi$$

Comme $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$ et que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \pi$

alors $$\int_S \omega = \int_0^{\pi}\left(\cancel{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta - \pi\sin^3\theta\right) d\theta$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right) d\theta$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\left[2\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\right](\sin\theta)\, d\theta$$

$$= \pi\left[-\cos^3\theta + \cos\theta\right]_0^{\pi} = \pi\left[\overset{0}{(1-1)} - \overset{0}{(-1+1)}\right] = 0$$

$$\boxed{\int_S \omega = 0}$$

2pts

2°/ Prévision: <u>Oui</u> le résultat était prévisible car:

$$d\omega = dz\wedge dx\wedge dy - dx\wedge dy\wedge dz$$
$$= dx\wedge dy\wedge dz - dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

et aussi $S = \partial B$ où B est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1

On a d'après le thm d'Ostogradski : $\displaystyle\int_{\partial B}\omega = \int_B d\omega$.

c.à.d $\displaystyle\int_{\partial B}\omega = \int_B 0 = 0$.

5pts