Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 1.
Module : *Calcul Différentiel et Intégral* - Épreuve Finale.
Mercredi 18/01/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (08pts) On considère la forme différentielle $\omega = y\,dx - x\,dy$. Montrer que ω n'est pas exacte. Déterminer toutes les fonctions $f(x,y)$ pour lesquelles la forme $\theta = f.\omega$ est exacte dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Déterminer ensuite les primitives de θ.

Exercice 2 : (06pts) Soit dans le plan $\mathbb{R}^2$ le triangle T de sommets $A(a,0)$, $B(0,a)$ et $C(a,a)$, où a est un paramètre réel positif. On oriente T positivement. Calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$\int_T y^2\,dx + (x+y)^2\,dy.$$

Exercice 3 : (06pts) Soient a, b deux paramètres réels tels que $b > a > 0$. On considère le domaine de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\right\}.$$

En utilisant la formule d'Ostogradski, calculer le volume de $\mathcal{D}$.

1ère année de Master E.D.P. - Semestre 1 - 2022/2023.

Module : "Calcul différentiel et Intégral".

Epreuve Finale - Corrigé.

Exercice 1 : (08pts) $\omega = y\,dx - x\,dy$

1°/ ω n'est pas exacte : en effet si ω était exacte ($\omega = d\tilde{\omega}$) alors $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$. Calculons $d\omega$:

$$d\omega = dy \wedge dx - dx \wedge dy = 2\,dy \wedge dx \neq 0.$$

Donc ω n'est pas exacte. 1pt

2°/ Détermination de f : $\Theta = f.\omega = y f(x,y)\,dx - x f(x,y)\,dy$.

Si Θ est exacte, alors elle sera fermée ($d\Theta = 0$). Déterminons f pour avoir $d\Theta = 0$. $d\Theta = \left(f(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \wedge dx - \left(f(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx \wedge dy$

D'où $d\Theta = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f(x,y)\right) dy \wedge dx$

f doit vérifier l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2f(x,y) = 0$ 4pts

Le système caractéristique s'écrit : $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{df}{-2f}$

Deux intégrales premières sont : $u_1 = x/y$ et $u_2 = y^2 f(x,y)$

Sous forme implicite : $\Phi\left(\frac{x}{y}, y^2 f(x,y)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{f(x,y) = \frac{1}{y^2} H(x/y)}$

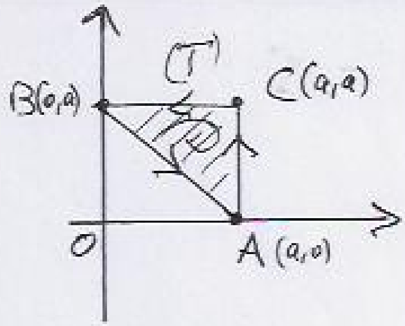
Cette résolution est possible pour $y \neq 0$. Mais l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ n'est pas étoilé. Prenons alors l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ (ou $y < 0$)

Alors $\Theta = \frac{1}{y} H\left(\frac{x}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} H\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left(\tilde{H}(x/y)\right)$

où $\left(\tilde{H}(t)\right)' = H(t)$.

Les primitives de Θ sont toutes les fonctions de la forme $\tilde{H}(x/y)$ où $\tilde{H}$ est une primitive de la fonction (d'1 variable) H. 3pts

Exercice 2 : (06 pts) $I = \int_T y^2 dx + (x+y)^2 dy$



* Calcul direct :

$$I = \int_{[AC]} + \int_{[CB]} + \int_{[BA]}$$

$$I = \int_0^a (a+y)^2 dy + \int_a^0 a^2 dx + \int_0^a \left[(a-x)^2 + a^2\right] dx.$$

$$I = \left[\frac{1}{3}(a+y)^3\right]_0^a - a^2\left[x\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - ax^2\right]_0^a = \frac{8}{3}a^3 - \frac{a^3}{3} - a^3 + \frac{a^3}{3} - a^3$$ 3 pts

$$\boxed{I = \frac{2}{3}a^3}$$

* Calcul par la formule de Green-Riemann.

$$I = \iint_D \left(2(x+y) - 2y\right) dx\, dy = 2\iint_D x\, dx\, dy$$

$$I = 2\int_0^a x\left(\int_{a-x}^a dy\right) dx = 2\int_0^a x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a.$$ 3 pts

$$\boxed{I = \frac{2}{3}a^3}$$

Exercice 3 : (06 pts) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq a^2$ et $x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$
$(0 < a < b)$

A l'aide de la formule d'Ostogradski on peut écrire :

$$Vol(\mathcal{D}) \doteq \iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz = \iint_{\partial \mathcal{D}} z\, dx \wedge dy$$

(on peut choisir une autre 2-forme différentielle) 1,5

$\partial \mathcal{D} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, où $S_1 = \{x^2+y^2 = a^2$ et $z^2 \leq b^2 - a^2\}$

$S_2 = \{x^2+y^2 \leq a^2,\ z = \sqrt{b^2-(x^2+y^2)}\}$ 1,5

$S_3 = \{x^2+y^2 \leq a^2,\ z = -\sqrt{b^2-(x^2+y^2)}\}$.

Voici des paramétrisations simples :

. $S_1 : \begin{cases} x = a\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = a\sin\theta \\ z = t & -\sqrt{b^2-a^2} \leq t \leq \sqrt{b^2-a^2} \end{cases}$ $\qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 0 = \frac{\partial y}{\partial t}$ d'où $\iint_{S_1} z\, dx \wedge dy = 0$ 1

. $S_2 : \begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq a \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \sqrt{b^2-r^2} \end{cases}$ $\qquad \iint_{S_2} z\, dx \wedge dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2-r^2}\; r\,dr\,d\theta$

$$= \pi \left[-\frac{2}{3}(b^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a$$ 1

$$= \frac{2\pi}{3}\left[b^3 - (b^2-a^2)^{3/2}\right]$$

. $S_3 : \begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq a \\ y = r\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = -\sqrt{b^2-r^2} \end{cases}$

Ici pour avoir l'orientation avec la normale extérieure il faut prendre $\frac{D(x,y)}{D(\theta,r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r$ 1

D'où $\iint_{S_3} z\, dx \wedge dy = \frac{2\pi}{3}\left[b^3 - (b^2-a^2)^{3/2}\right]$

En définitive :

$$\boxed{Vol(\mathcal{D}) = \frac{4\pi}{3}\left[b^3 - (b^2-a^2)^{3/2}\right]}$$

3