Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Décembre 2022.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Epreuve de contrôle continu (1h45 mn)

Questions de cours

1) Montrer, au sens des distributions ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que $\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$
Rappel : $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $S = T$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\langle S, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ (1pt)

2) Montrer, au sens des distributions ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}(T(t-a))(\sigma) = e^{-2i\pi\sigma a}\mathcal{F}(T(t))(\sigma)$
Rappel : Au sens des fctions, $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow (\mathcal{F}f)(\nu - \nu_0) = \mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 t} f(t))(\nu)$ (1pt)

3) Montrer que la distribution de Dirac δ_a $(a \neq 0)$ se trouve dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (1pt)
Rappel : Il suffit de montrer que δ_a est linéaire et continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

4) Utilisant la déf. de base du support d'une distribution, déterminer $Supp(\delta_a)$ (1pt)

5) Vérifier que $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathcal{F}\delta_a$ au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (1.5pts)
Rappel : $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ et utiliser la question 2)

6) On définit l'application svte sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (1pt)
$\phi \longmapsto \phi(-\frac{1}{2}) + \phi(\frac{1}{2})$
Montrer alors que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Indication : Utiliser la question 3) ($a = -1/2$ puis $a = 1/2$)

7) On généralise ce résultat dans 6) à r pts de $\mathbb{R}$: a_i $i = 1, \dots, r$

7a) Montrer que la distribution $T_\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\phi \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \phi(a_i) = \phi(a_1) + \dots + \phi(a_r)$
est la somme de r distributions de Dirac δ_{a_i} $(i = \overline{1,r})$. (1pt)

7b) En déduire que $T_\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (1pt)

7c) Déterminer le support de T_δ. (1pt)
Rappel : S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.q. $Supp(S)$ et $Supp(T)$ bornés alors si $Supp(S) \cap Supp(T) = \emptyset$
$\Rightarrow Supp(S+T) = Supp(S) \cup Supp(T)$

7d) Vérifier alors que $T_\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathcal{F}T_\delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (1.5pts)

8) Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer que (i) $\delta(x - n\tau) = 1/\tau \, \delta(x/\tau - n)$ où $\tau \in \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$
et (ii) $\delta(\tau x - n) = 1/\tau \, \delta(x - n/\tau)$ (2pts)
Rappel : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors pour $a \in \mathbb{R}^*$ $\langle T(a\sigma), \phi(\sigma) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T(\sigma), \frac{1}{|a|}\phi(\frac{\sigma}{a}) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

9) En déduire, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, l'expression de $\mathcal{F}(Ш_\tau)$ où $Ш_\tau$ est le peigne de Dirac périodique de période $\tau > 0$: $Ш_\tau(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n\tau)$ (1pt)
Indication : $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}\left(\frac{1}{|a|} T(\frac{x}{a})\right)(\nu) = \mathcal{F}(T(x))(a\nu)$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$
Rappel : Le peigne de Dirac de période $\tau = 1$ est invariant par T.F. des distributions c.à d. $\mathcal{F}(Ш_1) = Ш_1$ $\left(\mathcal{F}(Ш_1(x))(\nu) = Ш_1(\nu) \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \nu \in \mathbb{R}\right)$

10) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors sa T.F. au sens des distributions (que l'on notera par $\mathcal{F}_{dist}$) coïncide dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ avec sa T.F. au sens des fonctions (que l'on notera par $\mathcal{F}_{fonct}$) c. à d. qu'il faut montrer ici que $\mathcal{F}_{dist}(f) = \mathcal{F}_{fonct}(f)$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (au sens des distrib. tempérées). (1p

<u>Transformée de Fourier numérique</u> (T.F.N.)

On rappelle que lors de l'échantillonnage d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on est amené à déterminer la distribution d'échantillonnage de f sur $\mathbb{Z}$ qui lui est associée : $f_{nT}(t) = f(t) Ш_T(t) = f(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$, $(T>0)$.

a) Après passage à l'espace fréquentiel, montrer que l'on obtient : $(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \frac{1}{T}(\mathcal{F}f)(\sigma) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\sigma - \frac{n}{T})$

<u>Rappels</u> : → $(\mathcal{F} Ш_a(t))(\sigma) = \frac{1}{a} Ш_{1/a}(\sigma)$ où $a>0$, $Ш_a$ étant le peigne de Dirac de période a. (1pt)

→ $\forall f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$ et $\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$

Pour aboutir à la notion de T.F. numérique appliquée à une suite infinie de valeurs $x_n = f(nT)$ $n \in \mathbb{Z}$ (ce sont les valeurs échantillonnées de f sur $\mathbb{Z}$), on transforme la relation précédente (voir a)) en utilisant la définition de base de la T.F. des fctions : $h \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(\mathcal{F}h)(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-2i\pi\sigma t} dt$

b) Montrer que $f_{nT}(t) = \lim_{\alpha \to 0^+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) f_\alpha(t-nT)$. (1pt)

<u>Rappels</u> : → $\delta_a(t) = \delta(t-a) = \lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(t-a)$ où $f_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } t \in [0,\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\left(\lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(t) = \delta(t)\right)$

→ $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Longrightarrow h(t) Ш_a(t) = h(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(na)\delta(t-na)$

c) Montrer alors que $(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) e^{-2i\pi\sigma nT} (\mathcal{F}f_\alpha)(\sigma)$. (1pt)

<u>Rappels</u> : L'opérateur de T.F. : $\mathcal{F}$ est lin. cont. de $\mathcal{S}'$ ds $\mathcal{S}'$ $\left(\lim_{\beta\to b}(\mathcal{F}g_\beta) = \mathcal{F}(\lim_{\beta\to b} g_\beta)\right)$

<u>Indication</u> : Utiliser le changement de variables $u = t - nT$ ou bien la question-cours 2)

d) Comme $(\mathcal{F}f_\alpha)(\sigma)$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{Z}$ et comme $\mathcal{F}$ cont. de $\mathcal{S}'$ ds $\mathcal{S}'$, montrer que $(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) e^{-2i\pi nT\sigma}$ (1pt) <u>Rappel</u> : Utiliser la question de cours 1).

e) Utiliser d) pour vérifier et confirmer que $\mathcal{F}f_{nT}$ est périodique de période $1/T$. (1pt)

<u>Indication</u> : Ici on pourra utiliser la périodicité au sens des fonctions périodiques pour répondre à cette question.

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2022/2023.
Décembre 2022.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

<u>Questions de cours</u>

1) $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\langle \mathcal{F}(\delta), \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \delta, \mathcal{F}\phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (\mathcal{F}\phi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-2i\pi 0 t} dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dt$

1 pt $\quad = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t)\, dt = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \Rightarrow \mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

2) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $\langle \mathcal{F}(T(t-a))(\sigma), \phi(\sigma) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T(t-a), (\mathcal{F}\phi(\sigma))(t) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T(t), (\mathcal{F}\phi)(t+a) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$= \langle T(t), (\mathcal{F}\phi)(t-(-a)) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} =$

$= \langle T(t), \mathcal{F}(e^{-2i\pi a\sigma}\phi(\sigma))(t) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ 1 pt

$= \langle (\mathcal{F}T)(\sigma), e^{-2i\pi a\sigma}\phi(\sigma) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$= \langle e^{-2i\pi\sigma a}(\mathcal{F}T)(\sigma), \phi(\sigma) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ $\forall \phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

<u>Conclusion</u>: $\mathcal{F}(T(t-a))(\sigma) = e^{-2i\pi\sigma a}\mathcal{F}(T(t))(\sigma)$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

3) $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\phi \longmapsto \delta_a(\phi) = \phi(a)$

Pour m.q. $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ il suffit de m.q. δ_a est lin. cont. sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effet, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\delta_a(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\phi(a) + \beta\psi(a) = \alpha\delta_a(\phi) + \beta\delta_a(\psi)$ 0.5 pt
Donc δ_a linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

δ_a cont. sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\forall \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. $\phi_n \xrightarrow[n\infty]{} \phi$ ds $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \delta_a(\phi_n) \xrightarrow[n\infty]{} \delta_a(\phi)$ puisque $\phi_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \phi \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}$ $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_n^{(m)}(x) - \phi^{(m)}(x)| \xrightarrow[n\infty]{} 0$
$\Rightarrow$ pour $m=0$ $\phi_n \overset{C.U.}{\underset{n\infty}{\Longrightarrow}} \phi$ (conv. uniforme) $\Rightarrow \phi_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} \phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_n(a) \xrightarrow[n\infty]{} \phi(a)$
0.5 pt $\quad \Rightarrow \delta_a(\phi_n) \xrightarrow[n\infty]{} \delta_a(\phi)$

4) <u>Rappel</u>: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Supp T est le complémentaire dans $\mathbb{R}$ du plus grand ouvert (noté Ω) sur lequel $T = 0$ (au sens des distributions ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).
$T = 0$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sur $\Omega \underset{ouv.}{\subset} \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. supp $\phi \subset \Omega$ $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$
$T = \delta_a$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle \delta_a, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \phi(a)$. le plus grand ouvert, noté tjrs Ω, sur lequel δ_a est nulle, est sans doute $\Omega = \mathbb{R} - \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ car $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. Supp $\phi \subset \Omega = \mathbb{R} - \{a\}$ est t.q. $\phi(a) = 0$ or $\phi(a) = \langle \delta_a, \phi \rangle$ De $\langle \delta_a, \phi \rangle = 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.q. Supp $\phi \subset \mathbb{R} \setminus \{a\} \not\ni a \Rightarrow \phi(a) = 0$ par déf. ni du support 1 pt
<u>Conclusion</u>: supp $\delta_a = C_{\mathbb{R}}\Omega = \{a\}$.

5) Supp δ_a borné $\Longrightarrow \delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ d'après le thm de Paley-Wiener-Schwartz 0.5 pt
$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\langle \delta_a, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \delta(x-a), \phi(x) \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ $\mathcal{F}(\delta_a(x))(\sigma) = \mathcal{F}(\delta(x-a))(\sigma) = e^{-2i\pi\sigma a}(\mathcal{F}\delta)(\sigma)$
or $\mathcal{F}(\delta(x))(\sigma) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\sigma) = 1$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow (\mathcal{F}\delta_a)(\sigma) = e^{2i\pi\sigma a}$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}$. 1 pt

6) $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\phi \longmapsto \phi(-\frac{1}{2}) + \phi(\frac{1}{2}) = \langle \delta_{-\frac{1}{2}}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle \delta_{1/2}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$
De $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \delta_{-\frac{1}{2}} + \delta_{1/2}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \Longrightarrow T = \delta_{-1/2} + \delta_{1/2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 1 pt
car $\delta_{-1/2}$ et $\delta_{1/2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (d'après 3)) $\Longrightarrow \delta_{-1/2} + \delta_{1/2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (esp. vectoriel).

7) 7a) $T_\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \phi(a_i) = \sum_{i=1}^{r} \langle \delta_{a_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \sum_{i=1}^{r} \delta_{a_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T_\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = T(\phi)$$

On a donc $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle T_\delta, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \sum_{i=1}^{r} \delta_{a_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{r} \delta_{a_i}$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 1pt

7b) $\forall i = 1,\dots,r$ $\delta_{a_i} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (d'après 3)) $\Rightarrow T = \sum_{i=1}^{r} \delta_{a_i} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ car $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ esp. vect 1pt

7c) $\forall i = 1,\dots,r$ $\operatorname{Supp} \delta_{a_i} = \{a_i\}$ et $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ (a_i distincts pour $i = \overline{1,r}$)

$\Rightarrow \{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset$ si $i \neq j \Rightarrow \operatorname{Supp} T_\delta = \bigcup_{i=1}^{r} \{a_i\} = \{a_1, \dots, a_r\}$ 1pt

7d) $\operatorname{Supp} T_\delta \subset [a_1, a_r] \Rightarrow \operatorname{Supp} T_\delta$ borné $\Rightarrow T_\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (Thm de P-W-S) 0,5pt

$$(\mathcal{F} T_\delta)(\sigma) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^{r} \delta_{a_i}\right)(\sigma) = \sum_{i=1}^{r} (\mathcal{F}\delta_{a_i})(\sigma) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{F}(\delta(x-a_i))(\sigma)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} e^{-2i\pi\sigma a_i}$$ d'après la question 5) en se rappelant que l'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire. 1pt

8) Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer (i) revient à m.q. $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle \delta(x-n\tau), \phi(x) \rangle = \langle \frac{1}{\tau}\delta(\frac{x}{\tau}-n), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

En effet, $\langle \frac{1}{\tau}\delta(x/\tau - n), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \frac{1}{\tau}\delta_n(\frac{x}{\tau}), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \frac{1}{\tau}\langle \delta_n(x), \tau\phi(x\tau) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ 1pt

$= \langle \delta_n(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ où l'on a posé $\psi(x) = \phi(x\tau)$

$= \psi(n) = \phi(n\tau) = \langle \delta(x-n\tau), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ (i)

où l'on a utilisé la formule de changement d'échelle svte : $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\langle T(a\sigma), \phi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T(\sigma), \frac{1}{|a|}\phi(\frac{\sigma}{a}) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

avec $a \neq 0$. Ds notre cas : $a = 1/\tau > 0$ $T = \delta_n, \sigma = x$.

De même pour montrer (ii), il suffit de m.q. $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\langle \delta(\tau x - n), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \frac{1}{\tau}\delta(x-\frac{n}{\tau}), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

En effet, $\langle \delta(\tau x - n), \phi(x) \rangle = \langle \delta_n(\tau x), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \delta_n(x), \frac{1}{\tau}\phi(\frac{x}{\tau}) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \frac{1}{\tau}\langle \delta_n(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ où $\psi(x) = \phi(\frac{x}{\tau})$ 1pt

$= \frac{1}{\tau}\psi(n) = \frac{1}{\tau}\phi(\frac{n}{\tau}) = \frac{1}{\tau}\langle \delta(x-\frac{n}{\tau}), \phi(x) \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ (ii)

où l'on a utilisé la même formule qu'en (i) mais avec $a = \tau > 0$

9) L'indication ns permet d'écrire ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\tau}Ш\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)(\nu) = \mathcal{F}(Ш(x))(\tau\nu)$
$= Ш(\tau\nu)$

c.à.d. $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\frac{x}{\tau}-n\right)\right)(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\tau\nu - n) = Ш(\tau\nu)$

car, d'après le rappel, $Ш = Ш_1$ reste invariant par T.F. ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

puisque $Ш(\sigma) = Ш_1(\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\sigma - n)$ et $Ш_\tau(\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\sigma - n\tau)$ $(\tau > 0)$

Donc d'après (i) et (ii) on peut écrire :

$$\mathcal{F}(Ш_\tau(x))(\nu) = \mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n\tau)\right)(\nu) \underset{(i)}{=} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\frac{x}{\tau}-n\right)\right)(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\tau\nu - n) \underset{(ii)}{=} \frac{1}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{n}{\tau}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau}Ш_{1/\tau}(\nu)$$

Donc $\mathcal{F}(Ш_\tau)(\nu) = \frac{1}{\tau}Ш_{1/\tau}(\nu)$. 1pt

10) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\langle \mathcal{F}_{dist} f, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} := \langle f, \mathcal{F}\phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}} f(x)(\mathcal{F}\phi)(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma) e^{-2i\pi x\sigma} d\sigma\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\sigma} dx\right) d\sigma$$ 1pt

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma)(\mathcal{F}_{fonct} f)(\sigma)\, d\sigma = \langle \mathcal{F}_{fonct} f, \phi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

$\Longrightarrow \mathcal{F}_{dist} f = \mathcal{F}_{fonct} f$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

c.à.d. au sens des distributions (tempérées).

Transformée de Fourier numérique (T.F.N.)

a) $f_{nT}(t) = f(t)\text{Ш}_T(t) \Rightarrow (\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = (\mathcal{F}f)(\sigma) * (\mathcal{F}\text{Ш}_T)(\sigma) = (\mathcal{F}f)(\sigma) * \left(\frac{1}{T}\text{Ш}_{1/T}(\sigma)\right)$

$= \frac{1}{T}(\mathcal{F}f)(\sigma) * \text{Ш}_{1/T}(\sigma) = \frac{1}{T}(\mathcal{F}f)(\sigma) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\sigma - \frac{n}{T}\right)$ (1pt

b) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f_{nT}(t) = f(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(t-nT)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)f_\alpha(t-nT)$ (1pt

c) $(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \mathcal{F}\left(\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)f_\alpha(t-nT)\right)(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\left(\mathcal{F}f_\alpha(t-nT)\right)(\sigma)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}\left(\mathcal{F}f_\alpha(t)\right)(\sigma)$ (1pt

Ici on rappelle que $\mathcal{F}$ est l'opérateur linéaire et continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
On rappelle aussi la propriété svte : $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ $(\mathcal{F}T(t-a))(\sigma) = e^{-2i\pi\sigma a}(\mathcal{F}T(\,))(\sigma)$.
(question-cours 2)

Autre version : Utilisation du changement de variables $u = t - nT$

$(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \mathcal{F}\left(\lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)f_\alpha(t-nT)\right)(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\left(\mathcal{F}f_\alpha(t-nT)\right)(\sigma)$

car on rappelle ici que $\mathcal{F}$ est un opérateur lin. cont. de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ds $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Utilisant le changement de variables $u = t - nT$ après avoir appliqué la définition de base de la transformée de Fourier des fctions ($f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})\ \forall \alpha > 0$), on obtient :

$$(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(t-nT)e^{-2i\pi\sigma t}\,dt$$

$$\overset{u=t-nT}{=} \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(u)e^{-2i\pi\sigma(u+nT)}\,du$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(u)e^{-2i\pi\sigma u}\,du$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}\left(\mathcal{F}f_\alpha(u)\right)(\sigma)$$

d) La valeur $(\mathcal{F}f_\alpha)(\sigma)$ étant indépendante de $n\in\mathbb{Z}$, on peut écrire alors

$$(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \lim_{\alpha\to 0^+}(\mathcal{F}f_\alpha)(\sigma).\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}$$

$= \mathcal{F}\left(\lim_{\alpha\to 0^+} f_\alpha(t)\right)(\sigma)\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}$ car $\mathcal{F}$ cont. de $\mathcal{S}'$ ds $\mathcal{S}'$.

$= \mathcal{F}(\delta(t))(\sigma)\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}$ (Voir rappels ds quest. b))

$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\sigma)\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi\sigma nT}$ (Voir quest. de cours 1)). (1pt

D'où le résultat $(\mathcal{F}f_{nT})(\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi nT\sigma}$

e) $(\mathcal{F}f_{nT})\left(\sigma + \frac{1}{T}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi nT(\sigma + 1/T)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi nT\sigma}e^{-2i\pi n(T/T)}$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-2i\pi nT\sigma} = (\mathcal{F}f_{nT})(\sigma)$ car $e^{-2i\pi n} = \cos(2n\pi) - i\sin(2n\pi) = 1$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(1pt