Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Première année de Master E.D.P - Semestre 1.
Module : *Calcul Différentiel et Intégral* - Épreuve de Contrôle continu.
Jeudi 08/12/2022 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (10pts) Soit $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles d'ordre n, muni de la norme d'opérateurs

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A.x\|_2}{\|x\|_2}, \qquad \text{pour} \ \ A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$$

où $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne du vecteur x dans $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction $F : \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ définie par

$$F(X) = X - X^2.$$

1. Dire, sans faire des calculs, pourquoi F est de classe C^∞.
2. Calculer la différentielle de F en un point X_0, notée dF_{X_0}.
3. Notons $U_{X_0} = id - dF_{X_0}$ où id désigne l'application "identité" dans l'espace $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. Montrer que $\|U_{X_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}(n,\mathbb{R}))} \leq 2\|X_0\|$.
4. En déduire que si $\|X_0\| < \frac{1}{2}$, alors dF_{X_0} est inversible.

Exercice 2 : (10pts)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (u,v) \quad , \quad \text{où} \ \begin{cases} u = -2x + \sin y \\ v = -2y + \sin x \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

1. Montrer que f est localement inversible au voisinage de tout point.
2. Montrer que f est injective.
3. En utilisant le théorème de Levy-Hadamard, montrer que f est un difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^2$.

M1 - EDP - Semestre 1 - 2022/2023.

Module : "Calcul différentiel et Intégral"

Contrôle continu - Corrigé.

Exercice 1 : (10 pts) $F(X) = X - X^2$

1/ $F \in C^\infty(\mathcal{M}(n,\mathbb{R}))$: En effet la matrice $X - X^2$ a des coefficients qui s'expriment comme des polynômes de degré 2 en les coefficients de X. Donc F est de classe C^∞. (2pts)

2/ Différentielle de F : Calculons $F(X_0+H)$:

$$
\begin{aligned}
F(X_0+H) &= (X_0+H) - (X_0+H)^2 \\
&= (X_0+H) - (X_0^2 + X_0H + HX_0 + H^2) \\
&= (X_0 - X_0^2) + (H - X_0H - HX_0) - H^2 \\
&= F(X_0) + dF_{X_0}(H) - H^2.
\end{aligned}
$$

L'expression (linéaire en H) candidate pour la différentielle est $\boxed{dF_{X_0}(H) = H - X_0H - HX_0}$. Pour le montrer appliquons la définition :

$$\| F(X_0+H) - F(X_0) - dF_{X_0}(H) \| = \| H^2 \| \leq \| H \|^2$$

et ce d'après les propriétés de la norme d'opérateur.

D'où $\dfrac{\| F(X_0+H) - F(X_0) - dF_{X_0}(H) \|}{\| H \|} \leq \| H \|$. (3pts)

d'où $\displaystyle\lim_{\|H\| \to 0} \frac{\| F(X_0+H) - F(X_0) - dF_{X_0}(H) \|}{\| H \|} = 0.$

3°/ Majoration de $\|U_{X_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$:

$$U_{X_0} = id - dF_{X_0} \Rightarrow U_{X_0}(H) = H - dF_{X_0}(H)$$

donc $U_{X_0}(H) = X_0H + HX_0$

$$\Rightarrow \|U_{X_0}(H)\| = \|X_0H + HX_0\|$$
$$\leq \|X_0H\| + \|HX_0\|$$
$$\leq \|X_0\| \cdot \|H\| + \|H\| \cdot \|X_0\|$$
$$\leq 2\|X_0\| \cdot \|H\|$$

et donc $\dfrac{\|U_{X_0}(H)\|}{\|H\|} \leq 2\|X_0\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{H \neq 0} \frac{\|U_{X_0}(H)\|}{\|H\|}}_{= \|U_{X_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}} \leq 2\|X_0\|$$

3pts

4°/ Inversibilité de dF_{X_0} :

On a $dF_{X_0} = id - U_{X_0}$

Comme $\|U_{X_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))} \leq 2\|X_0\| < 1$ si $\|X_0\| < 1/2$

On applique un thm du cours qui dit que si $\|U_{X_0}\| < 1$ alors $id - U_{X_0}$ est inversible.

cqfd.

et d'ailleurs $(dF_{X_0})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} U_{X_0}^k$.

2pts

Exercice 2 : (10 pts) $f : \begin{cases} u = -2x + \sin y \\ v = -2y + \sin x \end{cases}$.

1°/ f est localement inversible en tout pt :

* f est manifestement de classe C^1, car de classe C^∞, étant composée de fonctions C^∞ $(-2x, -2y, \sin x, \sin y)$.

* Calculons $df_{(x,y)}$: $df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$.

1 pts

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -2 & \cos y \\ \cos x & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(df_{(x,y)}) = 4 - (\cos x) \cdot (\cos y)$$

$$\boxed{\det(df_{(x,y)}) = 4 - \cos x \cos y}$$

On a $|\cos x| \leq 1$ et $|\cos y| \leq 1 \Rightarrow |\cos x \cos y| \leq 1$

et donc $-1 \leq \cos x \cos y \leq 1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \quad 3 \leq 4 - \cos x \cos y \leq 5$$

càd $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(df_{(x,y)}) \neq 0$

D'après le thm de l'inversion locale, f est localement inversible, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2°/ f est injective : Partons de $f(x,y) = f(x',y')$, càd

$$\begin{cases} -2x + \sin y = -2x' + \sin y' \\ -2y + \sin x = -2y' + \sin x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y - \sin y' = 2(x - x') \\ \sin x - \sin x' = 2(y - y') \end{cases}$$

D'après le thm des accroissements finis on a :

$$\sin x - \sin x' = (x - x') \cos C_1$$
$$\sin y - \sin y' = (y - y') \cos C_2$$

D'où $|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'|$ car $\begin{cases} |\cos c_1| \leq 1 \\ |\cos c_2| \leq 1 \end{cases}$

$|\sin y - \sin y'| \leq |y - y'|$

Donc on obtient

$$\begin{cases} 2|x-x'| \leq |y-y'| \\ \quad \text{et} \\ 2|y-y'| \leq |x-x'| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2|x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-x'| \\ \quad \text{et} \\ 2|y-y'| \leq \frac{1}{2}|y-y'| \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} \frac{3}{2}|x-x'| \leq 0 \\ \frac{3}{2}|y-y'| \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ \text{et} \\ y = y' \end{cases}$ 3pts

3°/ <u>f difféomorphisme global</u> : (Application du thm de Levy-Hadamard)

* f est bien de classe C^1, car de classe C^∞.
* $df_{x,y}$ est inversible $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ($1^{ère}$ question).
* Reste à montrer que f est <u>propre</u> ; càd

$\forall K \subset \mathbb{R}^2$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

K compact $\Leftrightarrow$ K fermé + K borné.

. K fermé $\Rightarrow$ $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue. ($f \in C^\infty$).

. <u>$f^{-1}(K)$ est borné</u> : en effet $f^{-1}(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in K\}$.

Par hypothèse K est borné, donc si $(u,v) \in K$ alors

$\|(u,v)\|_1 \leq M \Leftrightarrow |u| + |v| \leq M \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq M \\ \text{et} \\ |v| \leq M \end{cases}$ 4pts

d'où $|-2x + \sin y| \leq M$ et $|-2y + \sin x| \leq M$.

Or $|-2x + \sin y| \geq \big|2|x| - |\sin y|\big| \Rightarrow \big||2x| - |\sin y|\big| \leq M$

et donc $2|x| - |\sin y| \leq \big|2|x| - |\sin y|\big| \leq M \Rightarrow |x| \leq \frac{M+1}{2}$

de m̂, $|y| \leq \frac{M+1}{2} \Rightarrow \|(x,y)\|_1 \leq M+1$. cqfd.