Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2022-2023
Module : Contrôle optimal
Durée : 01h. 30min.

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN DE RATTRAPAGE DU MARDI 13 JUIN 2023.

EXERCICE 1 (08 points).

On considére le problème de contrôle optimal suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)x(t),\ t \in [0;T]\ ; \\ x(0) = x_0, \\ \min(x^2(T) + \int\limits_0^T u^2(t)dt), \end{cases}$$

où a, b et x_0 sont des constantes réelles, $T > 0$ fixé et on ne suppose aucune contrainte sur le contrôle u et $x(T)$ est libre.

On note la variable adjointe λ.

1) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

2) Écrire l'équation différentielle de l'état adjoint λ.

3) Écrire la condition de transversalité $\lambda(T)$.

4) Donner l'expression du contrôle optimal u^* en fonction de b, λ et la trajectoire optimale x^*.

5) Montrer que la fonction définie par $t \mapsto \lambda(t)x^*(t)$, pour tout $t \in [0;T]$, est constante.

6) En déduire que le contrôle optimal u^* est constant.

EXERCICE 2 (12 points).

Une entreprise produit un bénéfice $x(t) > 0$ au temps t. Une fraction $u(t)x(t)$ de ce bénéfice, avec $0 \leq u(t) \leq 1$, est réinvestie dans la production et contribue à l'augmentation de la richesse crée par l'entreprise et le reste est distribué aux actionnaires.

On suppose que l'évolution du bénéfice est gouverné par le problème de Cauchy suivant

$$(2) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = ku(t)x(t),\ 0 < t \leq T, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où k et x_0 sont deux constantes strictement positives données et $T > 0$ fixé.

La fraction $u(t) \in [0;1]$ réinvestie est considérée comme un contrôle et on considère le problème de contrôle optimal

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} C(u) \text{ avec } C(u) = \int\limits_0^T (u(t) - 1)x(t)\,dt,$$

où x désigne l'unique solution de (2) et

$$U_{\text{ad}} = \{u \in L^\infty([0;T]) \,/\, 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ p.p dans } [0;T]\}.$$

1) Résoudre le problème de Cauchy (2) pour $u \equiv 0$ et $u \equiv 1$.

2) On note la variable adjointe λ.

2.1) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

2.2) Écrire l'équation différentielle de l'état adjoint λ.

2.3) Écrire la condition de transversalité $\lambda(T)$.

2.4) Écrire la condition de minimisation et en déduire l'expression du contrôle optimal u^* en fonction de k et la fonction λ.

2.5) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u^*(t) = 0$, pour presque tout $t \in [T-\varepsilon; T]$.

2.6) Soit t_0 un temps tel que $k\lambda(t_0) = -1$. Montrer qu'alors on a nécessairement $\dot{\lambda}(t_0) = 1$ et en déduire que l'ensemble $\{t \in [0; T] \,/\, k\lambda(t) = -1\}$ est de mesure nulle. Que peut-on en déduire sur le contrôle optimal u^* ?

2.7) On suppose que $u^* = 1$. En utilisant l'équation différentielle satisfaite par λ et la question 2.4) vérifier que la fonction λ est strictement croissante.

2.8) En utilisant les question précédentes, démontrer que u^* est bang-bang avec au plus une commutation.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2022-2023
Module : Contrôle optimal.

Corrigé de l'examen de rattrapage.

Exercice 1

1) Le Hamiltonien H est donné par

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda(t) \cdot (a\, x(t) + b\, u(t)\, x(t)) + u^2(t).$$ 1 pt.

2) L'équation différentielle de l'état adjoint.

On note par u^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale.

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \lambda, u^*)$$ 1 pt.

$$= - \lambda(t)\,(a + b\, u(t)).$$ 1 pt.

3) La condition de transversalité $\lambda(T)$.

$$\lambda(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(T)) \quad , \text{ avec } \Psi(x) = x^2$$

$$= 2\, x^*(T).$$

1 pt.

4) L'expression du contrôle optimal u^* en fonction de b, λ et la trajectoire optimale x^*.

On a,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, \lambda, u^*) = 0$$ car il n'y a aucune contrainte sur le contrôle.

C'est-à-dire,

$$b\,\lambda(t)\, x^*(t) + 2\, u^*(t) = 0.$$

2pts

Ce qui donne,

$$u^*(t) = -\frac{b\,\lambda(t)\, x^*(t)}{2}.$$

5) Montrons que la fonction définie par $t \mapsto \lambda(t)x^*(t)$, pour tout $t \in [0;T]$, est constante.

Soit $t \in [0;T]$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda(t)x^*(t))' &= \dot\lambda(t)x^*(t) + \lambda(t)\dot x^*(t)\\ &= -\lambda(t)(a+bu^*(t))x^*(t) + \lambda(t)(ax^*(t)+bu^*(t)x^*(t))\\ &= 0.\end{aligned}$$

1pt.

Alors $\forall t \in [0;T]$, $(\lambda(t)x^*(t))' = 0$.

C'est-à-dire la fonction $t \mapsto \lambda(t)x^*(t)$ est constante.

6) Comme $u^*(t) = -\dfrac{b\lambda(t)x^*(t)}{2}$ et la fonction $t \mapsto \lambda(t)x^*(t)$ est constante, alors le contrôle u^* est constant. 1pt.

Exercice 2

1) Pour $u \equiv 0$, on a

$$\begin{cases}\dot x(t) = 0, & 0 < t \le T,\\ x(0) = x_0.\end{cases}$$

1pt.

Alors $\forall t \in [0,T]$, $x(t) = x_0$.

Pour $u \equiv 1$, on a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\,x(t), & 0 < t \leq T, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Alors $$x(t) = x_0\, e^{kt}, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$ 1pt.

2)

2.1) Le Hamiltonien H est donné par

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = k\,\lambda(t)\,u(t)\,x(t) + (u(t) - 1)\,x(t).$$ 1pt.

2.2) On note par u^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale. Alors on a,

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \lambda, u^*)$$ 1pt.

$$= -(k\,\lambda(t) + 1)\,u^*(t) + 1.$$

2.3) La condition de transversalité $\lambda(T)$.

$$\lambda(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(T)) \text{ avec } \Psi \equiv 0.$$ 1pt.

$$= 0.$$

2.4) On a,

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in [0,1]} H(x^*(t), \lambda(t), v).$$

C'est-à-dire,

$$k\lambda(t) u^*(t) x^*(t) + (u^*(t) - 1) x^*(t) = \min_{v \in [0,1]} \left[k\lambda(t) v x^*(t) + (v-1) x^*(t) \right]$$

C'est-à-dire,

$$(k\lambda(t) + 1) u^*(t) x^*(t) = \min_{v \in [0,1]} (k\lambda(t) + 1) v \, x^*(t).$$

Comme $x^*(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$, on obtient

$$(k\lambda(t) + 1) u^*(t) = \min_{v \in [0,1]} (k\lambda(t) + 1) v$$

2 pts.

Ce qui donne,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\lambda(t) + 1 > 0, \\ 1 & \text{si } k\lambda(t) + 1 < 0. \end{cases}$$

2.5) Comme $\lambda(T)=0$, alors $k\lambda(T)+1=1>0$ et comme la fonction $t\mapsto\lambda(t)$ est continue, alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $k\lambda(t)+1>0$, pour tout $t\in[T-\varepsilon;T]$. Ce qui entraîne que $u^*(t)=0$, pour presque tout $t\in[T-\varepsilon;T]$. 1 pt.

2.6) On a,

$$\dot{\lambda}(t_0) = -(k\lambda(t_0)+1)\,u^*(t_0)+1$$

$$= 1 \quad \text{car } k.\lambda(t_0)+1=0.$$

$$\neq 0.$$

0,5 pts

Alors les zéros de la fonction $t\mapsto k\lambda(t)+1$ sont isolés et par conséquent l'ensemble $\{t\in[0;T]\,/\,k\lambda(t)=-1\}$ est de mesure nulle. 0,5 pts

On en déduit que le contrôle optimal u^* est bang-bang, égal à 0 ou 1 presque partout. 1 pt.

2.7) On suppose que $u^* = 1$, alors on a

$$\dot{\lambda}(t) = -k\,\lambda(t)$$
$$> 1 \text{ car } k\lambda(t)+1>0.$$

0,5pts

C'est-à-dire la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ est strictement croissante.

2.8) D'aprés la question 2.6), le contrôle optimal u^* est bang-bang.

Montrons maintenant que u^* admet au plus un point de commutation. Supposons par absurde qu'il existe un point de commutation $t_1 \in]0;T[$ de $u^*=0$ à $u^*=1$. Alors d'aprés la question 2.6) on a $\dot{\lambda}(t_1) = 1 > 0$, et par suite il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $k\lambda(t)+1>0$, pour tout $t \in]t_1, t_1+\varepsilon[$ ce qui signifie que $u^*(t)=0$, pour $t \in]t_1, t_1+\varepsilon[$, ce qui contredit notre hypothèse et par conséquent le contrôle optimal u^* admet au plus une commutation.

1,5pts