Université de Tlemcen
Département de Mathématiques

Faculté des sciences
Module: Théorie de bifurcation
Examen final, Mai 2023, durée 1h30.

Exercice1: Soit le système discret

$$x_{n+1} = \mu x_n \left(1 - x_n^2\right) = f_\mu\left(x_n\right)$$

a) **03 pts + 03 pts** Déterminer les points fixes et étudier leur stabilité.
Sol: les points fixes sont:

$$x_1^* = 0,\ x_\pm^* = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}$$

notons que $x_\pm^*$ existent pour $\mu \geq 1$.**01 pt**
Pour étudier la stabilité, calculons la dérivée

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(x\right) = \mu\left(1 - 3\left(x\right)^2\right)$$

ainsi

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(x_\pm^*\right) = \mu\left(1 - 3\left(x_\pm^*\right)^2\right) = 3 - 2\mu$$

Les 2 points fixes sont stables si

$$-1 < 3 - 2\mu < 1$$

par contre

$$\frac{d}{dx} f_\mu\left(0\right) = \mu$$

et $x_1^* = 0$ est stable si

$$|\mu| < 1$$

b)**04 pts** pour quelle valeur de $\mu \geq 0$, l'intervalle $[-1, +1]$ est positivement invariant.

Le tableau de variation de $f_\mu\left(x\right)$ montre que

$$\frac{-2\mu}{3\sqrt{3}} \leq f_\mu\left(x\right) \leq \frac{2\mu}{3\sqrt{3}}$$

il est clair que $[-1, 1]$ est positivement invariant si

$$-1 \leq \frac{-2\mu}{3\sqrt{3}} \leq \frac{2\mu}{3\sqrt{3}} \leq 1$$

Exercice 2: Soit le système continue

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = \sigma (x - y) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{array} \right.$$

a) Montrer que l'axe des z est positivement invariant.

Sol: 04 pts Remarquons que

$$x = 0,\, y = 0$$

est solution pour le système

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = \sigma (x - y) \\ y' = rx - y - xz \end{array} \right.$$

ainsi toute solution démarrant sur oz, vérifie

$$z' = -bz$$

d'où

$$z(t) = z(0)e^{-bt}$$

b) Montrer que pour $0 < r < 1$, $(0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Sol: 05 pts cette question a été traitée dans les TD.