*Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen* *A.U. 2022/2023*
*Faculté des Sciences / Département de Mathématiques*

*Final :* **Méthodes de Réduction** II,

*Master Biomathématiques et Modélisation*

29 *mai 2023* [1h30]

Partie I [10pts]

Soit le système

$$(S)\quad \begin{cases} \dot{z}_1 = az_1 + bz_2, & \\ z_2 = cz_1 + dz_2, & x,y \geq 0 \\ \dot{x} = x(1-2x-y+z_2), & a,b,c,d \in \mathrm{R}. \\ \dot{y} = y(2-2xe^{z_1 z_2}-y), & \end{cases}$$

Etudier l'applicabilité du théorème de convergence de Thieme à ce système.

Que représente biologiquement le problème limite $(M)$, quand il existe ? Tracer le portrait de phase de $(M)$.

Montrer que, sous les conditions d'appilicabilité du théorème de Thieme, $(S)$ admet un équilibre GAS pour toute condition $(z_1^0, z_2^0, x^0, y^0)$ dans $\mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}_+^{*2}$.

Partie II [10 pts]

Soit le modèle biologique, appelé modèle de prédation 'donor control' et dans lequel la proie de densité $x$ se développe nettement plus vite que le prédateur de densité $y$,

$$(S_\varepsilon)\ \begin{cases} \varepsilon\dot{x} = rx(1-x) - (c+\varepsilon)x, \\ \dot{y} = ecx - dy, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

avec $(x,y) \in \mathrm{R}_+^2$ et $r$, $c$, $e$ et $d$ des paramètres strictement positifs.

1. Dans le cadre de *la théorie de Tikhonov* pour les systèmes lents-rapides, déterminer et dessiner toutes les composantes <u>attractives</u> et <u>répulsives</u> de la variété lente, selon les paramètres.
2. Supposons que $r > c$. Montrer que le modèle $(S_\varepsilon)$ admet un point $E^*(x^*, y^*)$ à préciser qui soit $SGPAS$. quand $\varepsilon \to 0$ pour toute condition initiale $(x_0 > 0, y_0 \geq 0)$? Préciser ce qui est apparent dans cette stabilité et dessiner le portrait de phase approximatif.
3. Supposons toujours que $r > c$. A l'aide du $1^{er}$ *Théorème de Fenichel*, dont on vérifiera l'applicabilité, déterminer une approximation $O(\varepsilon^2)$ de la variété invariante attractive de Fenichel et le problème réduit correspondant.

Quel résultat de stabilité pourrait-on déduire par la théorie de Fenichel ?

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.(...) Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences; non que j'en fasse fi, loin de là, mais elle n'a rien à faire avec la science; je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir.

-Henri Poicaré-

*Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen* *A.U. 2022/2023*
*Faculté des Sciences / Département de Mathématiques*

*Final :* **Méthodes de Réduction** II,
*Master Biomathématiques et Modélisation*
29 *mai 2023* [1h30]

Partie I [10pts]

Soit le système

$$(S)\quad \begin{cases} \dot{z}_1 = az_1 + bz_2, & \\ z_2 = cz_1 + dz_2, & x,y \geq 0 \\ \dot{x} = x(1-2x-y+z_2), & a,b,c,d \in \mathbb{R}. \\ \dot{y} = y(2-2xe^{z_1 z_2}-y), & \end{cases}$$

Etudier l'applicabilité du théorème de convergence de Thieme à ce système.

Que représente biologiquement le problème limite $(M)$, quand il existe ? Tracer le portrait de phase de $(M)$.

Montrer que, sous les conditions d'appilicabilité du théorème de Thieme, $(S)$ admet un équilibre GAS pour toute condition $(z_1^0, z_2^0, x^0, y^0)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^{*2}$.

Partie II [10 pts]

Soit le modèle biologique, appelé modèle de prédation 'donor control' et dans lequel la proie de densité $x$ se développe nettement plus vite que le prédateur de densité $y$,

$$(S_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = rx(1-x)-(c+\varepsilon)x, \\ \dot{y} = ecx - dy, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

avec $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $r$, $c$, $e$ et $d$ des paramètres strictement positifs.

1. Dans le cadre de *la théorie de Tikhonov* pour les systèmes lents-rapides, déterminer et dessiner toutes les composantes attractives et répulsives de la variété lente, selon les paramètres.
2. Supposons que $r > c$. Montrer que le modèle $(S_\varepsilon)$ admet un point $E^*(x^*,y^*)$ à préciser qui soit $SGPAS$. quand $\varepsilon \to 0$ pour toute condition initiale $(x_0 > 0, y_0 \geq 0)$? Préciser ce qui est apparent dans cette stabilité et dessiner le portrait de phase approximatif.
3. Supposons toujours que $r > c$. A l'aide du $1^{er}$ *Théorème de Fenichel*, dont on vérifiera l'applicabilité, déterminer une approximation $O(\varepsilon^2)$ de la variété invariante attractive de Fenichel et le problème réduit correspondant.

Quel résultat de stabilité pourrait-on déduire par la théorie de Fenichel ?

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.(...) Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences; non que j'en fasse fi, loin de là, mais elle n'a rien à faire avec la science; je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir.

-Henri Poicaré-

# Corrigé du final : Méthodes de Réduction II du 29 mai 2023.

**Partie I,** Le système (S) est de la forme

$$(S)\ \begin{cases} \dot{z} = Az \\ x = f_1(z_1, z_2, x, y) \\ \dot{y} = f_2(z_1, z_2, x, y) \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

et $f_1(z_1, z_2, x, y) = x(1 - 2x - y + z_2)$
$f_2(z_1, z_2, x, y) = y(2 - 2x\, e^{z_1 + z_2} - y)$

→ . $f = (f_1, f_2)$ est de classe $C^1$ sur $D = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^2$

. L'invariance positive de $D$ par (S) proviendra des conditions sur $\dot{z} = Az$ (hypothèse H1) et du fait que pour le sous-système en $(x, y)$, les hyperplans $x = 0$ et $y = 0$ sont invariants. 0,25

. La dissipativité de (S) proviendra de H1 aussi et du fait que le système limite sera un modèle dissipatif classique de biomathématiques.

H1 : Pour que la matrice $A$ soit de Hurwitz, il faut supposer que $\operatorname{Tr} A < 0$ et $\operatorname{Det} A > 0$

ie $\boxed{\begin{cases} a + d < 0 \\ ad - bc > 0 \end{cases}}$ (Val. propres à parties réelles strictement négatives) 0,75

Dans ce cas, la solution $z(t) = e^{tA} z(0)$ de $\dot{z} = Az$ vérifie $\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Le problème limite est alors

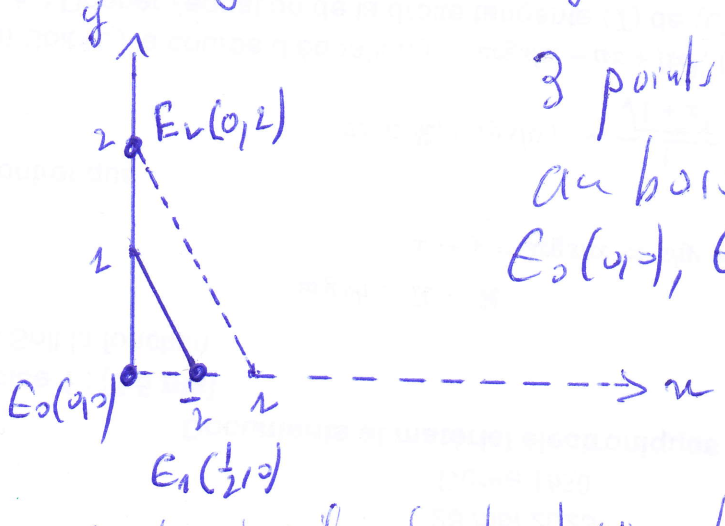
$$(M) \begin{cases} \dot{x} = x(1-2x-y) = f_1(0,0,x,y) \\ \dot{y} = y(2-2x-y) = f_2(0,0,x,y) \end{cases}$$ 0,5

qui n'est autre qu'un modèle de compétition de Lotka-Volterra. 0,5

<u>H2)</u> On utilise les propriétés des modèles de compétition : on trace les isoclines, on localise les équilibres.

$\dot{x} = 0 \iff x = 0$ ou $y = -2x+1$

$\dot{y} = 0 \iff y = 0$ ou $y = -2x+2$




3 points d'équilibre, tous au bord $E_0(0,0)$, $E_1(\frac{1}{2},0)$, $E_2(0,2)$

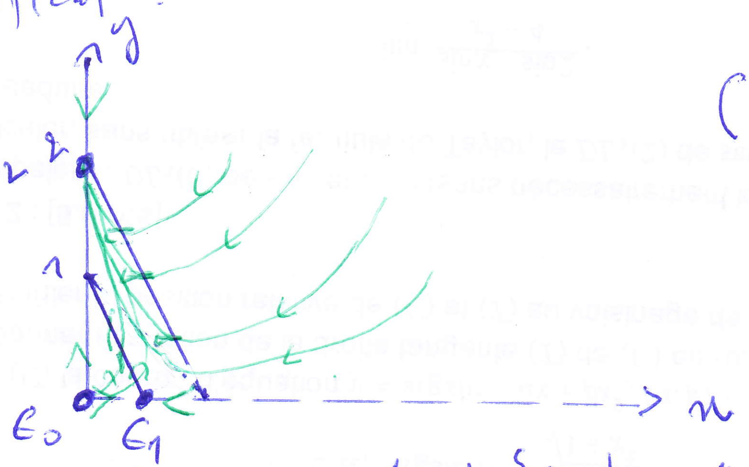
On sait qu'ils sont hyperboliques (modèle de compétition) mais on peut aussi le vérifier rapidement en écrivant les jacobiennes de (M) en ces points. 1,5
On peut aussi le voir graphiquement car en ces points les isoclines sont « <u>transverses</u> »

**H3.** Là aussi, on peut calculer les jacobiennes pour déterminer les propriétés de stabilité pratique. On peut aussi, puisque nous allons tracer le portrait de phase de (M), déterminer la direction du champ graphiquement : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

$\dot{x} \geq 0 \iff 1 - 2x - y \geq 0 \iff y \leq -2x + 1.$

$\dot{y} \geq 0 \iff 2 - 2x - y \geq 0 \iff y \leq -2x + 2.$

Ces informations nous permettent alors d'obtenir ce portrait :




(Exclusion compétitive)

$E_1$ point selle donc $\dim W^s(E_1) = 1 < 2$

$E_0$ point répulsif donc $\dim W^s(E_0) = 0 < 2$

$E_2$ localement asymptotiquement stable donc $\dim W^s(E_2) = 2$

**H4.** $\Omega = \mathbb{R}_+^2$. Soit $(x^0, y^0) \in \Omega$.

* si $(x^0, y^0) = (x^0, 0)$, $x_0 > 0$, alors $(x^0, y^0) \in W^s(E_1)$

si $(x^0, y^0) = (0,0)$ alors $(x^0, y^0) = E_0 = W^s(E_0)$.

si $(x^0, y^0)$ est tel que $x_0 \geq 0$, $y_0 > 0$ alors $(x^0, y^0) \in W^s(E_2)$

Donc $\Omega = \bigcup_{i=0}^{2} W^s(E_i)$.

H5 : Les seuls chains sont :

$E_0 \longrightarrow E_1$ , $E_1 \longrightarrow E_2$ , $E_0 \longrightarrow E_2$.

Il n'y a pas de chaîne fermée.

Conclusion 1 : D'après le théorème de convergence de Thieme, toute solution $(z_1(t), z_2(t), x(t), y(t))$ de (S) est définie pour tout $t \geq 0$ et converge vers un des équilibres correspondants (équilibres de (S))

$\bar{E}_0(0,0,0,0)$, $\bar{E}_1(0,0,\frac{1}{2},0)$, $\bar{E}_2(0,0,2,0)$.

0.5

1

Conclusion 2 : On sait que $\bar{E}_2(0,0,2,0)$ est aussi LES pour (S) $\left(\dim \underbrace{W^s(\bar{E}_2)}_{\text{Var. stable de } \bar{E}_2 \text{ selon } (S)} = \dim W^s(E_2) + 2\right)$

si $(z_1^0, z_2^0, x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, sachant que la solution $x(t), y(t)$ de C.I $(x^0, y^0)$ de (R) converge vers $E_2$, alors la solution $(z_1(t), z_2(t), x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \bar{E}_2$.

(Attractivité globale + stabilité) $\Longrightarrow$ $\bar{E}_2$ est GAS pour (R)

pourvu que $x_0 > 0, y_0 > 0$

Rem : c'est encore vrai si $x_0 \geq 0$ et $y_0 > 0$.

1

1°/ (E.R) $x' = \underbrace{rx(1-x) - cx}_{f(x)}$, y paramètre

$(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}$, $c = \frac{t}{\varepsilon}$.

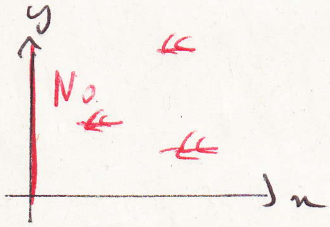
Variété lente : $\underbrace{x = 0}_{N_0}$ ou $\underbrace{x = \frac{r-c}{r}}_{M_0}$.

$M_0$ existe si $r \geq c$. Elle est non triviale si $\underline{\underline{r > c}}$.

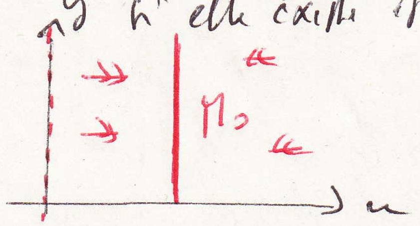
<u>Attractivité</u>, $f'(x) = r - 2rx - c$

d'où $f'(0) = r - c$ c.à.d que $N_0$ est attractive si $r < c$

$f'\left(\frac{r-c}{r}\right) = -r + c$ càd que $M_0$ est attractive si elle existe i.e. que $\underline{r > c}$.




$r < c$




$r > c$

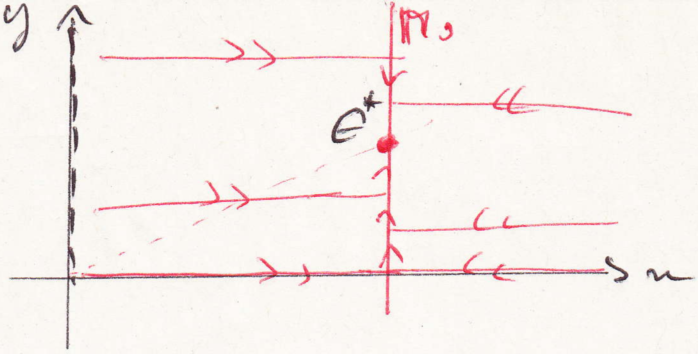
2/ $\underline{r > c}$. Il nous suffit de montrer que l'équation lente admet un équilibre G.A.S.

Or (E.L), $\boxed{\dot{y} = ec\left(\frac{r-c}{r}\right) - dy}$, $y \in \mathring{K}$, $K \subset_{cpt} \mathbb{R}_+$

admet $0 < y^* = \frac{ec}{d}\left(\frac{r-c}{r}\right)$ comme équilibre GAS.

On suppose que $y^* \in \mathring{K}$.

Ainsi $E^* = \left(x^* = \frac{r-c}{r}, y^* = \frac{ec}{d}\left(\frac{r-c}{r}\right)\right)$ est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$ pour le modèle $(S_\varepsilon)$, pour toute condition initiale $(x_0, y_0)$ telle que $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$ (voir figure)




Sachant que $E^*$ n'est pas équilibre, tout est apparent : stabilité, attractivité, globalité. 1.5 0.5

3°/ $r > c$. Notons que le système $(S_\varepsilon)$ est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,\varepsilon) := rx(1-x) - (c-\varepsilon)x \\ \dot{y} = g(x,y) = ecx - dy \end{cases}$$

La dépendance de $f$ par rapport à $\varepsilon$ doit être prise en compte.

<u>H1</u>, $f, g$ sont de classe $C^\infty$ / $x, y$ et $\varepsilon$. 0.5

<u>H2</u> ; La variété critique $M_0$ non triviale est normalement hyperbolique puisque attractive d'après la 1re équation $\left[ f'\left(\frac{r-c}{r}\right) = -r+c > 0 \right.$ $\left.(\text{car } c \neq 0)\right]$ 0.5

Pour $y \in K \subset \mathbb{R}_+$, $M_0$ est le graphe de la fonction $h_0(y) = \frac{r-c}{r}$.

~~Le calcul va~~ D'après le théorème de Fenichel, il existe, pour $\varepsilon$ assez petit, une fonction $h_\varepsilon : K \to \mathbb{R}_+$ dont le graphe $M_\varepsilon = \{(x,y) ; x = h_\varepsilon(y)\}$ est localement invariant, avec $h_\varepsilon \to h_0$. 0.5

On cherche une approximation de $h_\varepsilon$ comme solution de l'EDP $\boxed{f(h_\varepsilon(y), y, \varepsilon) = \varepsilon\, h'_\varepsilon(y) \cdot g(h_\varepsilon(y), y)}$,

avec $h_\varepsilon(y) = h_0(y) + \varepsilon h_1(y) + O(\varepsilon^2)$

On montre que $h_1(y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(h_0(y), y, 0)\right]^{-1} \cdot \left(h_0'(y) \cdot g(h_0(y), y) - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(h_0(y), y, 0)\right)$ 01

avec $\frac{\partial f}{\partial x}(h_0(y), y, 0) = -r + c$

$h_0'(y) = 0$ , $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(h_0(y), y, 0) = -h_0(y) = \frac{-r+c}{r}$

D'où $h_0(y) = \frac{r-c}{r}$ 01

$h_1(y) = \frac{1}{-r+c} \cdot \frac{-r+c}{r} = \frac{1}{r}$

D'où $h_\varepsilon(y) = \frac{r-c}{r} + \frac{1}{r}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

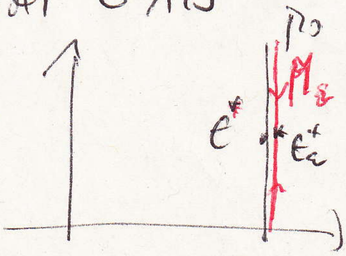
~~dont le graphe~~

Problème réduit de $\tilde{\Pi}_\varepsilon$, $O(\varepsilon)$ app. de $\Pi_\varepsilon$ 0.5

$(P.R_F)$ $\dot{y} = ec\left[\frac{r-c}{r} + \frac{1}{r}\varepsilon\right] - dy$

• Comme le champ de $\Pi_0$ perturbe de $\Pi_\varepsilon$, on peut déduire qu'il existe un équilibre $e^*_\varepsilon$ de $\Pi_\varepsilon$ qui soit G.A.S 0.5

pour toute c.I $(x_0, y_0)$ tq $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$.




— 7 — Fin