Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen | **Année Universitaire : 2022-2023**
Faculté des Sciences | **Module : Contrôle optimal**
Département de Mathématiques | **Durée : 01h. 50min.**

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL DU DIMANCHE 21 MAI 2023.

EXERCICE 1 (contrôle optimal d'une population de poissons) (09 points).

On considère $x(t)$, la quantité d'une certaine espèce de poisson dans un lac à l'instant t. Si on ne fait pas de prélèvement, c'est-à-dire si on ne pêche pas du tout, la population à l'instant t de cette espèce de poisson augmente à taux constant $\alpha > 0$, en suivant la loi d'évolution $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$.

Pêcher consiste à prélever une proportion de population, $u(t)x(t)$, où $u(.)$ désigne une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $0 \leq u(.) \leq M$, avec $M \in]0;1[$, un taux maximal fixé par les régulations de pêche de l'espèce en question. À l'instant initial, la population de pêche est estimée à $x(0) = x_0 > 0$.

La période de pêche est fixée, $[0;T]$, avec $T > 0$. L'objectif est de maximiser la pêche totalisée durant la période fixée, c'est-à-dire maximiser $\int_0^T u(t)\, x(t)\, dt$.

Le problème de contrôle optimal s'écrit alors

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t)\, x(t),\, t \in [0;T]\,; \\ x(0) = x_0; \\ \min\limits_{u \in U_{\text{ad}}} C(u) \text{ avec } C(u) = \int_0^T -u(t)\, x(t)\, dt, \end{cases}$$

et

$$U_{\text{ad}} = \left\{ u \in L^\infty([0,T]) \,/\, 0 \leq u(t) \leq M \text{ pour presque tout } t \in [0;T] \right\}.$$

1) Montrer que pour tout $t \in [0;T]$, on a $x(t) > 0$.

2) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

3) Écrire l'équation différentielle de l'état adjoint λ et la condition de transversalité $\lambda(T)$.

5) Écrire la condition de minimisation et en déduire que le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda(t) < -1, \\ M \text{ si } \lambda(t) > -1. \end{cases}$$

6) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = M$, pour presque tout $t \in [T-\varepsilon; T]$.

7) Soit t_0 un temps tel que $\lambda(t_0) = -1$. Montrer qu'alors on a nécessairement $\dot{\lambda}(t_0) = \alpha$ et en déduire que l'ensemble $\{t \in [0;T] \,/\, \lambda(t) = -1\}$ est de mesure nulle.

8) On suppose que $u^* = 0$. En utilisant l'équation différentielle satisfaite par λ et sachant que pour ce cas on a $\lambda < -1$, vérifier que la fonction λ est strictement croissante.

9) En utilisant les question précédentes, démontrer que u^* est bang-bang avec au plus une commutation.

EXERCICE 2 (contrôle du glucose dans le sang) (11 points).

Considérons un modèle simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose (exprimée en mg) au temps t (exprimé en s) à partir de l'instant initial $t_0 = 0$; on suppose que si on ne fait rien, elle diminue à un taux strictement positif α proportionnel à la quantité de sang présente dans le sang, de sorte que $\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Au départ, le niveau de glucose est $x(0) = a > 0$. Dans le but de porter le niveau de glucose à celui prescrit, soit $x(T) = c > a$, du glucose est transfusé dans le sang à raison de $u(t)\ mg/s$ (la vitesse de transfusion). On impose de plus que $0 \leq u(t) \leq m$ pour tout temps $t \in [0;T]$, où $m > 0$ est la valeur maximale de la vitesse de pénétration et on veut opérer en temps minimum.

Le problème de contrôle optimal considéré s'écrit donc

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t)\,,\ t \in [0;T]\,; \\ x(0) = a,\ x(T) = c; \\ \min\limits_{u \in U_{\text{ad}}} \int\limits_0^T dy, \end{cases}$$

avec $U_{\text{ad}} = \{u \in L^\infty([0;T]) \,/\, 0 \leq u(t) \leq m \text{ pour presque tout } t \in [0;T]\}$.

1) Montrer que pour tout $t \in [0;T]$, on a

$$x(t) = ae^{-\alpha t} + \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau.$$

2) En déduire que pour tout $t \in [0;T]$, on a

$$0 < x(t) \leq \max\left(a, \frac{m}{\alpha}\right).$$

Dans toute la suite de l'exercice on suppose que $m > c\alpha$.

3)

3.1) Montrer que si $u \equiv m$, alors

$$x(t) = ae^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), \text{ pour tout } [0;T].$$

3.2) Montrer que l'équation algébrique $ae^{-\alpha T} + \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) = c$ admet une unique solution donnée par $T = \dfrac{1}{\alpha} \ln\left(\dfrac{m - a\alpha}{m - c\alpha}\right)$.

3.3) En déduire qu'il existe $T > 0$ et un contrôle constant u dans $[0;m]$ tels que $x(T) = c$.

4) On note les variables adjointes λ et λ_0.

4.1) Écrire le Hamiltonien du problème de contrôle optimal.

4.2) Écrire l'équation différentielle de l'état adjoint λ.

4.3) Écrire la condition de transversalité sur le temps final T et montrer que $\lambda(T) \neq 0$.

4.4) Écrire la condition de minimisation et en déduire que le contrôle optimal u^* est donné par

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda(t) > 0, \\ m \text{ si } \lambda(t) < 0. \end{cases}$$

4.5) En utilisant la question 4.2) montrer que λ est de signe constant.

4.6) Montrer que si $u^* \equiv 0$, alors le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t), t \in [0;T]\,; \\ x(0) = a, x(T) = c. \end{cases}$$

n'admet aucune solution.

4.7) En déduire que $u^* \equiv m$ et $T = \dfrac{1}{\alpha} \ln\left(\dfrac{m - a\alpha}{m - c\alpha}\right)$.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

A. U. : 2022-2023

Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen final.

Exercice 1

1) Montrons que pour tout $t \in [0; T]$, on a $x(t) > 0$.

1ère méthode : Supposons qu'il existe un point $t_* \in]0; T]$ tels que $x(t_*) = 0$ et $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0; t_*[$.

Alors le problème suivant

1pt.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha\, x(t) - u(t)\, x(t), \\ x(t_*) = 0, \end{cases} \qquad (Ch1)$$

admet deux solutions la fonction x et la fonction identiquement nulle. Contradiction car le problème (Ch 1) admet une unique solution d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

2ème méthode

On a,
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t)x(t), & t \in [0;T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1pt.

Alors,
$$\left(e^{\int_0^t (u(s)-\alpha)ds} x(t) \right)' = 0, \text{ pour presque tout } t \in [0;T].$$

Ce qui donne,
$$x(t) = x_0 e^{\int_0^t (\alpha - u(s))ds}, \text{ pour tout } t \in [0;T]$$
$$> 0 \text{ car } x_0 > 0 \text{ et } e^{\int_0^t (\alpha - u(s))ds} > 0, \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

2) Le Hamiltonien H est donné par

1pt.

$$H(x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda(t)(\alpha x(t) - u(t)x(t)) - u(t)x(t).$$

3) L'équation différentielle de l'état adjoint λ.

Pour presque tout $t \in [0;T]$, on a
$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \lambda, u^*),$$
où u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale.

Ce qui donne,

$$\dot{\lambda}(t) = \left(u^*(t) - \alpha\right) \lambda(t) + u^*(t).$$ 1pt.

La condition de transversalité $\lambda(T)$

$$\lambda(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\left(x^*(T)\right)$$ 1pt.

$$= 0 \text{ car } \Psi \equiv 0.$$

5) On a,

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{v \in [0; M]} H(x^*(t), \lambda(t), v)$$

Ce qui donne,

$$-\left(\lambda(t)+1\right) u^*(t)\, x^*(t) = \min_{v \in [0; M]} -\left(\lambda(t)+1\right) v\, x^*(t).$$

Comme $x^*(t) > 0$, pour tout $t \in [0; T]$, on obtient 1pt.

$$-\left(\lambda(t)+1\right) u^*(t) = \min_{v \in [0; M]} -\left(\lambda(t)+1\right) v.$$

Alors,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(t)+1 < 0, \\ M & \text{si } \lambda(t)+1 > 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda(t) < -1; \\ M \text{ si } \lambda(t) > -1. \end{cases}$$

6) Comme $\lambda(T) = 0 > -1$ et la fonction $t \longmapsto \lambda(t)$ est continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(t) > -1$, pour tout $t \in [T-\varepsilon; T]$, 1pt.

ce qui entraîne que $u^*(t) = M$, pour presque tout $t \in [T-\varepsilon; T]$.

7) On a,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t_0) &= (u(t_0) - \alpha)\lambda(t_0) + u(t_0) \\ &= \alpha - u(t_0) + u(t_0) \\ &= \alpha \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

0,5 pts

Alors les zéros de la fonction $t \longmapsto \lambda(t) + 1$ sont isolés et par conséquent l'ensemble $\{t \in [0; T], \lambda(t) = -1\}$ est de mesure nulle.

0,5 pts.

8) On suppose que $u^* \equiv 0$, alors on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\alpha\,\lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0;T]$$

$$> 0 \quad \text{car } \alpha > 0 \text{ et } \lambda < -1.$$

0,5 pts

c'est-à-dire la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ est strictement croissante.

9) D'après les questions 5) et 7), il résulte que le contrôle optimal u^* est bang-bang. 0,5 pts.

Montrons maintenant que u^* admet au plus un point de commutation. Supposons par absurde qu'il existe un point de commutation $t_1 \in]0;T[$ de $u^* = M$ à $u^* = 0$.

Alors d'après la question 7), on a $\dot{\lambda}(t_1) = \alpha > 0$, et par suite il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\lambda(t) > -1$, pour tout $t \in]t_1; t_1 + \varepsilon_1[$, ce qui signifie que $u^*(t) = M$, pour $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon_1[$, ce qui contredit notre hypothèse et par conséquent le contrôle optimal u^* admet au plus une commutation.

1pt.

Exercice 2

1) On a,

$$\left(e^{\alpha t}x(t)\right)' = e^{\alpha t}u(t), \text{ pour presque tout } t\in[0;T].$$

Ce qui donne,

$$e^{\alpha t}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{\alpha\tau}u(\tau)\,d\tau, \text{ pour tout } t\in[0;T].$$

1pt.

C'est-à-dire,

$$x(t) = a\,e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau, \text{ pour tout } t\in[0;T].$$

2) Pour tout $t\in[0;T]$, on a

0,5 pts

$$x(t) \geq a\,e^{-\alpha t}$$
$$> 0 \quad \text{car } a>0 \text{ et } e^{-\alpha t}>0, \text{ pour tout } t\in[0;T].$$

De même pour tout $t\in[0;T]$, on a

$$x(t) \leq a\,e^{-\alpha t} + m\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau$$
$$= a\,e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$= \left(a - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}$$

On distingue deux cas.

Si $a \leq \frac{m}{\alpha}$, on obtient $x(t) \leq \frac{m}{\alpha}$. 0,5 pts.

Si $a > \frac{m}{\alpha}$, on obtient $x(t) \leq a - \frac{m}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} = a$.

En conclusion,

$$\forall t \in [0;T], \quad 0 < x(t) \leq \max\left(\frac{m}{\alpha}, a\right).$$

3)

3.1) Si $u \equiv m$, on a

$$x(t) = a e^{-\alpha t} + m \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \, d\tau, \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

1 pt.

$$= a e^{-\alpha t} + \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

3.2) On a,

$$a e^{-\alpha T} + \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) = c.$$

C'est-à-dire,

$$\left(a - \frac{m}{\alpha}\right) e^{-\alpha T} + \frac{m}{\alpha} = c.$$

C'est-à-dire,

$$(\alpha a - m) e^{-\alpha T} = \alpha c - m.$$

C'est-à-dire,
$$e^{-\alpha T} = \frac{m - \alpha c}{m - \alpha a}.$$

1pt.

C'est-à-dire,
$$-\alpha T = \ln\left(\frac{m - \alpha c}{m - \alpha a}\right).$$

Ce qui donne,
$$T = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{m - \alpha a}{m - \alpha c}\right).$$

3.3) Si on prend $u \equiv m$ et $T = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{m - \alpha a}{m - \alpha c}\right)$, on a $x(T) = c$.

0,5 pts

4)

4.1) Le Hamiltonien H est donné par

$$H(x(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t)) = \lambda(t)(-\alpha x(t) + u(t)) + \lambda_0,$$

avec $\lambda_0 \in \{0, 1\}$.

1pt.

4.2) L'équation différentielle de l'état adjoint λ.

Si on note par u^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale, on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) \quad 1pt.$$

$$= \alpha \lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

4.3) La condition de transversalité sur le temps final T.

On a,

$$H(x^*(T), \lambda(T), \lambda_0, u^*(T)) = -\lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t}(T), \text{ avec } \Psi \equiv 0.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(T)(-\alpha x^*(T) + u^*(T)) + \lambda_0 = 0. \quad 1pt.$$

Montrons que $\lambda(T) \neq 0$.

Supposons par absurde que $\lambda(T) = 0$, alors $\lambda_0 = 0$.

Alors, on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = \alpha \lambda(t), & t \in [0;T], \\ \lambda(T) = 0. \end{cases} \quad 0{,}5 pt$$

Par unicité, on a $\lambda \equiv 0$. Contradiction car $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$.

4.4) On a,

$$H(x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) = \min_{v \in [0,m]} H(x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, v).$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t)\, u^*(t) = \min_{v \in [0,m]} \lambda(t)\, v.$$

1 pt

Alors, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(t) > 0, \\ m & \text{si } \lambda(t) < 0. \end{cases}$$

4.5) On a,

$$\dot{\lambda}(t) = \alpha\, \lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0; T].$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = C e^{\alpha t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$= \lambda(T)\, e^{\alpha(t-T)}, \text{ pour tout } t \in [0; T].$$

0,5 pts

Comme $\lambda(T) \neq 0$, alors on a $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0; T]$ si $\lambda(T) > 0$ ou $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0; T]$ si $\lambda(T) < 0$. C'est-à-dire λ est de signe constant.

4.6) Si $u \equiv 0$, on a

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t), \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

$$< 0 \text{ car } \alpha > 0 \text{ et } x(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0;T].$$

C'est-à-dire la fonction $t \longmapsto x(t)$ est strictement décroissante et par conséquent le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t), & t \in [0;T], \\ x(0) = a, & x(T) = c, \end{cases}$$

1pt.

n'admet aucune solution car $c > a$.

4.7) D'aprés les questions 4.4), 4.5), 4.6) et 3.3, il résulte que $u^* \equiv m$ et $T = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{m - \alpha a}{m - \alpha c}\right)$.

0,5 pts.