Université Aboubekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences. Département de Mathématiques. A.U :2022-2023.

Epreuve Finale : *EDP approfondie* - Master 1 BIoMath.
Dimache 25/05/2023 - Durée : 1.5 h.

Considérons Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$ et $c_0, c_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $b(\cdot)$ une fonction mesurable qui vérifie *p.p.* sur Ω ; $0 < c_0 \leq b(x) \leq c_1$.

Exercice 1 :

1) Montrer qu'il existe une constante $a > 0$ tel que

$$(\forall u \in H_0^1(\Omega)) \ \int_\Omega b(x)\, u^2 \ \leq a \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

2) Montrer que si $\displaystyle\int_\Omega b(x) \cdot u^2 = 0$ alors $u = 0$.

On définit $F = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) / \displaystyle\int_\Omega b(x)\, u^2 = 1 \right\}$ et on note par $A(u) = \displaystyle\int_\Omega b(x) \cdot u^2$.

3) Montrer que $0 \notin F$ et que $F \neq \phi$? (*considérer* $t\, u_0$*, avec* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$)

4) Montrer que F est fermée dans $H_0^1(\Omega)$.

5) Montrer que F est non dégénérée. (i.e. $(\forall u \in F)\ DA(u) \neq 0$.)

On définit $\lambda_1 := \displaystyle\inf_{u \in F} \int_\Omega |\nabla u|^2$

6) Montrer que $\lambda_1 > 0$.

7) Montrer que λ_1 est atteint par une fonction $\overline{u} \in F$

8) Montrer que $\overline{u}$ vérifie l'équation,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda_1 \cdot b(x) \cdot u & \text{dans } \Omega \\ u &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u &\neq& 0 & \end{array} \right. \qquad \text{(P)}$$

Exercice 2 :

1) Donner la formulation variationnelle et la fonctionnelle d'énergie associée à (P).

2) Montrer que le problème (P) admet une infinité de solution.

Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. Supposons que le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v &=& \lambda_1 \cdot b(x) \cdot v \, + \, f(x) & \text{dans } \Omega \\ v &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \qquad \text{(Pf)}$$

admet une solution.

3) Montrer que (Pf) admet une infinité de solution.

4) Montrer que $\displaystyle\int_\Omega f\, u = 0$, où u est une solution quelconque du (P).

Bonne chance.
Y.O.BOUKARABILA

Correction de l'Epreuve Finale : EDP approfondie2 2022/2023

<u>**Corr.Exercice 1**</u> :

1) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. De l'inégalité de Poincaré on a

$$\int_\Omega b(x)\, u^2 \ \leq c_1 \cdot \int_\Omega u^2 \leq c_1 \cdot M \int_\Omega |\nabla u|^2$$

où $M > 0$ est une constante qui vérifie l'inégalité de Poincaré ;

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega)) \ \int_\Omega v^2 \leq M \int_\Omega |\nabla v|^2.$$

Ainsi $a := C_1 \cdot M > 0$ répond à la question.

2) Puisque

$$\int_\Omega b(x) \cdot u^2 \geq c_0 \cdot \int_\Omega u^2$$

alors $\int_\Omega b(x)\, u^2 = 0$ implique $\int u^2$ donc $u = 0$.

3) $0 \notin F$ puisque $\int b(x)\, 0^2 = 0 \neq 1$.

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. On a $t \cdot u_0 \in F$ où

$$|t| = \Big(\int_\Omega b(x)\, u_0^2 \Big)^{-0.5}.$$

Ceci montre que $F \neq \phi$.

4) Soit $\{u_n\}_n \subset F$ tel que $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. D'après les injections compactes de Rellich-Kondrashov, il existe une sous suite [1] tel que $u_n \to u$ fortement dans L^p pour tout $p < 2^*$ et $u_n \to u$ p.p.

Notez que

$$\int_\Omega b(x)\, (u_n^2 - u^2) = \int_\Omega b(x)\, (u_n - u)\, (u_n + u)$$

Puisque $b(\cdot) \in L^\infty$ et $u_n - u \longrightarrow 0$ fortement dans L^2 et $u_n + u \longrightarrow 2 \cdot u$ fortement dans L^2 alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega b(x)\, (u_n^2 - u^2) = 0.$$

Ce qui montre que $u \in F$.

5) Soit $u \in F$. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$DA(u)(v) = 2 \int_\Omega b(x)\, u \cdot v.$$

Pour $v = u$ on récupère $DA(u)(u) = 2 \neq 0$.

Ceci montre que $DA(u) \neq 0$ pour tout $u \in F$.

1. qu'on note aussi par u_n afin de simplifier les notations.

6) A partir de Q.1) on déduit

$$(\forall u \in F) \quad 1 \leq a \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2$$

ceci montre que

$$\lambda_1 \geq a^{-1} > 0.$$

7) Soit $\{u_n\}_n \subset F$ tel que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \longrightarrow \lambda_1$ [2]. Ceci montre que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par reflexivité et l'injection compacte de Rellich-Kondrachov, il existe une sous suite [3] tel que

i) $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$,
ii) $u_n \longrightarrow \overline{u}$ fortement dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p < 2^*$,
iii) $u_n \longrightarrow \overline{u}$ p.p.

Notez que *ii*) entraîne que $\overline{u} \in F$ (appliquer le même raisonnement de la question **4)**)

Ceci combinée avec *i*) donne

$$\lambda_1 \leq \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \lambda_1.$$

On a ainsi, $\overline{u} \in F$ et il vérifie

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 = \lambda_1.$$

8) Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ (multiplicateur de Lagrange) tel que

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla v = \mu \cdot \int_\Omega b(x) \cdot \overline{u} \cdot v.$$

En particulier pour $v = \overline{u}$, on récupère

$$\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 = \mu \cdot \int_\Omega b(x) \cdot \overline{u}^2 = \mu.$$

Ce qui montre finalement, que $\overline{u}$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \overline{u} & = & \lambda_1 \cdot b(x) \cdot \overline{u} & \text{dans } \Omega \\ \overline{u} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \overline{u} & \neq & 0 & \end{array} \right. \tag{P}$$

Il est important de noter que λ_1 est une valeur propre et $\overline{u}$ est un vecteur propre.

□

2. une telle suite est dite minimisante
3. on la note aussi par $\{u_n\}_n$ pour simplifier les notations.

Corr.Exercice 2 :

1) La formulation variationnelle associée à (P) :

$$\left\{\begin{array}{ll} u \in H_0^1(\Omega) & \\ (\forall \xi \in H_0^1(\Omega)) & \displaystyle\int_\Omega \nabla u \, \nabla \xi = \lambda_1 \int_\Omega b(x)\, u\, \xi. \end{array}\right. \tag{P}$$

La fonctionnelle d'énergie :
$I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda_1 \int_\Omega b(x)\, u^2.$$

2) Si u est solution de (P) alors pour tout $t \in \mathbb{R}\,;\, t \cdot u$ est aussi solution.

3) Soient u une solution de (P) et v une solution de (Pf). Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $w_t = v + tu$. On a

$$-\Delta w_t = \lambda_1\, b(x) \cdot v + f(x) + t\, \lambda_1\, b(x)\, u.$$

C'est à dire,

$$-\Delta w_t = \lambda_1\, b(x)\, w_t + f(x), \quad \text{dans } \Omega.$$

En plus, on a $w_t = 0$ sur $\partial\Omega$.

4) Si u est solution de (P) alors

$$(\forall \xi \in H_0^1(\Omega)) \quad \int_\Omega \nabla u \, \nabla \xi = \lambda_1 \int_\Omega b(x)\, u\, \xi.$$

En utilisant u comme une fonction test dans (Pf),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda_1 \int_\Omega b(x)\, u \cdot v + \int_\Omega f(x)\, u$$

On déduit,

$$\int_\Omega f\, u = 0.$$

$\square$