Université de Tlemcen, Département de Mathématiques
Master: Biomaths
Module: Théorie de bifurcation,
Contôle Continu du 16/03/2023, durée 1h30'. **(Barème)**

Exercice1. (10 points) Soit le système

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$

1) Montrer que le système admet une variété centre W_c et une variété stable W_s.
2) Determiner la variété stable W_s
3) Montrer que les orbites vérifient

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{x}}$$

où C est une constante arbitraire.
4) W_c est elle analytique ? i.e la fonction qui décrit W_c est elle développable en série entière ?
Solution:1)

Le système s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + N(x,y)$$

La partie nonlinéaire est régulière et vérifie

$$N(0,0) = \nabla N(0,0) = (0.0)$$

La partie linéaire admet 0 et -1 comme des valurs propres simples , d'où l'existence d'une variété centre et stable de dimension une **(03 pts)**
2) La variété stable coincide avec E_s.**(03 pts)**
3) **(02 pts)**Nous remarquons que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2}$$

ainsi

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$

4)**(02 pts)** Si la variété centre est analytique alors

$$W_c = \{(x,y) : y = h(x)\}$$

avec h de classe C^{∞}.Dans ce cas

$$h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \sum a_n x^n \quad \textbf{(1.5pt)}$$

on remplace dans le système, par identification nous obtenons une relation

$$a_n = 0 \quad \forall n$$

Exercice 2.(10 points)

Soit l'équation

$$x'' - \left(\mu - x^2\right) x' + x = 0 \qquad (E)$$

1) **(05 pts)**Montrer que (E) admet une bifurcation de Hopf pour $\mu^* = 0$.
2)**(05 pts)** Determiner la nature de la bifurcation.
Solution: posons $x' = y$, l'équation (E) devient

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = y = f_\mu(x, y) \\ y' = x'' = \left(\mu - x^2\right) x' - x = \left(\mu - x^2\right) y - x = g_\mu(x, y) \end{array} \right.$$

la matrice jacobienne en $(0, 0)$, donne

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

ainsi

$$a(\mu) = \frac{\mu}{2}$$

et $a(\mu) = 0$ ssi $\mu = 0$. De plus $\frac{da(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2} \neq 0$. le problème admet une bifurcation de Hopf en $\mu^* = 0$. Un calcul simple de l'indice de Marsden Mc Craken donne que la bifurcation est surcritique.