Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques

Partiel : **Méthodes de Réduction** II,

Master Biomathématiques et Modélisation

27 *avril 2023* [1h30]

Partie I [8 pts]

On considère le système différentiel régulièrement perturbé ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} = -h(x,y,\varepsilon)x - (y+\varepsilon)^3, \\ \dot{y} = -kh(x,y,\varepsilon)y + x, \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \quad k > 0, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} h(x,y,\varepsilon) = h_0(x,y) > 0.$$

1) Montrer que le problème réduit (S_0) a l'origine $(0,0)$ pour seul équilibre.

2) Etablir une propriété de stabilité pratique pour l'origine du système (S_ε) quand $\varepsilon \to 0$. Utiliser la fonction $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}$.

3) Quelles sont les propriétés qui sont juste apparentes dans ce résultat ?

Partie II [12 pts]

Regardons à présent le système singulièrement perturbé :

$$(\tilde{S}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -h(x,y,\varepsilon)x - y^3, \\ \dot{y} = -kh(x,y,\varepsilon)y + x, \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes :

$$(H_2) \quad k > 0, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} h(x,y,\varepsilon) = h_0(y) > \alpha > 0.$$

1) Montrer que l'origine de $(\tilde{S}_\varepsilon)$ est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$.

2) Sous quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) cette stabilité pratique est-elle une vraie stabilité asymptotique globale?

"Ce monde est juste là pour que nous apprenions".

-Kurt Gödel 1906-1978-

"Nous leur montrerons Nos signes dans l'univers et en eux-mêmes, jusqu'à ce qu'il leur devienne évident que c'est cela la Vérité. Ne suffit-il pas que ton Seigneur soit témoin de toute chose?" Fussilat-verset 53.