Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2022-2023
Module : Contrôle optimal
Durée : 01h. 45min.

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU DU JEUDI 16 MARS 2023.

EXERCICE 1 (07 points). On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) + u(t), \, t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \\ \min \left(-x(1) + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 u^2(t)\,dt \right), \end{cases}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Écrire le Hamiltonien du problème.
2) Écrire l'équation différentielle de l'état adjoint λ et la condition de transversalité $\lambda(1)$.
3) Donner l'expression du contrôle optimal u^* en fonction de l'état adjoint.
4) Déterminer le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimale associée x^*.

EXERCICE 2 (06 points). On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical satisfaisant à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -x(t) + u(t), \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

où u est un contrôle.

1) Mettre l'équation différentielle (1) sous la forme d'un système différentiel

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t).$$

On cherche un contrôle u qui minimise le critère quadratique suivant :

$$C(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \left(x^2(t) + (x'(t))^2 + u^2(t) \right) dt.$$

2.1) Mettre le coût $C(u)$ sous la forme

$$\int\limits_0^{+\infty} (X^t(t) W X(t) + u^t(t) U u(t)) dt,$$

où W est une matrice carrée d'ordre deux et U est une constante.

2.2) Résoudre l'équation de Riccati stationnaire suivante

$$W = A^t E + EA + EBU^{-1}B^t E,$$

où l'inconnue E est une matrice carrée d'ordre deux symétrique définie négative.

2.3) En déduire l'expression du contrôle optimal en boucle fermée.

EXERCICE 3 (07 points). Une usine fabrique un certain produit dont le stock est $x(t)$ avec $x(0)=1$ et le taux de production $x(t)$ vérifie $\dot{x}(t)=x(t)+u(t)$. Pour $\varepsilon>0$ donné, on considère la fonctionnelle J_{ε} donnée par

$$J_{\varepsilon}(u)=\frac{1}{2\varepsilon}x^{2}(1)+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}u^{2}(t)\,dt.$$

1) On suppose d'abord que la production est donnée par $u(\cdot)=1$ (constante au cours du temps).
   1.1) Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)+1,\ t\in[0,1],\\ x(0)=1.\end{cases}$$

   1.2) Calculer $J_{\varepsilon}(1)$.
2) On considère le problème de contrôle optimal linéaire suivant

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)+u(t),\ t\in[0,1],\\ x(0)=1,\\ \min\ J_{\varepsilon}(u)=\min\ \left(\frac{1}{2\varepsilon}x^{2}(1)+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}u^{2}(t)\,dt\right).\end{cases}$$

Déterminer le contrôle optimal et la trajectoire optimale.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2022-2023
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé du contrôle continu.

Exercice 1 : 07 points.

1) Le Hamiltonien H est donné par

$$H(x,\lambda,u) = \lambda\,(2x+u) + \frac{u^2}{2}. \quad 1pt$$

2) L'équation différentielle de l'état adjoint est

$$\dot\lambda(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,\lambda,u^*) \quad 1pt.$$

$$= -2\,\lambda(t), \quad \text{pour tout } t\in[0,1].$$

La condition de transversalité est donnée par

$$\lambda(1) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(1)), \text{ avec } \Psi(x) = -x.$$

$$= -1. \quad 1pt.$$

3) On a,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, \lambda, u^*) = 0.$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) + u^*(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

1pt.

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = -\lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

4)

On a,
$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -2\lambda(t), & t \in [0,1], \\ \lambda(1) = -1. \end{cases}$$

Alors, $\left(e^{2t}\lambda(t)\right)' = 0$, pour tout $t \in [0,1]$.

Ce qui donne, $e^{2t}\lambda(t) = e^{2}\lambda(1)$, pour tout $t \in [0,1]$.

C'est-à-dire, $\lambda(t) = -e^{2(1-t)}$, pour tout $t \in [0,1]$.

Par suite,

$$u^*(t) = e^{2(1-t)}, \quad \text{pour tout } t \in [0,1].$$ 1,5 pts

Déterminons maintenant la trajectoire optimale x^*.

On a,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 2\,x^*(t) + u^*(t), \ t \in [0,1], \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 2\,x^*(t) + e^{2(1-t)}, \ t \in [0,1], \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

Alors $\left(e^{-2t}\,x^*(t)\right)' = e^{2(1-2t)}$, pour tout $t \in [0,1]$.

Ce qui donne,

$$e^{-2t}\,x^*(t) - x_0 = -\frac{1}{4}\left(e^{2(1-2t)} - e^{2}\right),$$ pour tout $t \in [0,1]$.

1,5 pts

Alors,

$$x^*(t) = x_0\,e^{2t} + \frac{e^2}{2}\,\mathrm{Sh}(2t), \quad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Exercice 2 : 06 points

1) On pose $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Alors,

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$= A.\,X(t) + B.\,u(t),$$

1pt.

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) 2.1) On a,

$$C(u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(x^2(t) + \dot{x}^2(t) + u^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(X^t(t)\, W\, X(t) + u^t(t)\, U\, u(t)\right) dt,$$

avec $W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $U = \frac{1}{2}$.

1 pt.

2.2) Résolvons l'équation de Riccati stationnaire suivante

$$W = A^t E + E A + E B U^{-1} B^t E,$$

où l'inconnue E est une matrice carrée d'ordre deux définie négative.

On pose,

$$E = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 2\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c & -b \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & a \\ -b & c \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2c & a-b \\ a-b & 2c \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2c & a-b \\ a-b & 2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c^2 & 2cb \\ 2cb & 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2c^2-2c & a-b+2cb \\ a-b+2cb & 2c+2b^2 \end{pmatrix}.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} 2c^2 - 2c = \frac{1}{2}, & (*) \\ a-b+2cb = 0, & (**) \\ 2c+2b^2 = \frac{1}{2}. & (***) \end{cases}$$

1pt.

D'après $(*)$ $\quad c = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ou $c = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

Si $c = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, alors d'aprés (***), on a

$$b^2 = \frac{1}{4} - c$$
$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) < 0. \text{ contradiction.}$$

0,5 pts

Alors $c = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Maintenant d'aprés (***), on a :

$$b^2 = \frac{1}{4} - c$$
$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{4}.$$

Alors $b = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Si $b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$, alors d'aprés (**), on a

$a = b(1-2c) = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} > 0$. contradiction

car la matrice E doit être définie négative.

Par suite,
$$b = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2},$$ (0,5 pts)

et par conséquent,
$$a = b(1-2c) = -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}.$$ (0,5 pts)

En conclusion
$$E = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{pmatrix}.$$ (0,5 pts)

2.3) On note par u^* le contrôle optimal et X^* la trajectoire optimale.

Alors, on a
$$u^*(t) = U^{-1}.B^t.E.X^*(t)$$
$$= 2.(0 \quad 1).\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{pmatrix} X^*(t)$$
$$= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2\sqrt{2}-1} \end{pmatrix} X^*(t)$$ (1pt.)

Exercice 3 : 07 points.

1)

1.1) On a,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 1, \ t \in [0,1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Alors,

$$\left(e^{-t} x(t)\right)' = e^{-t}, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Ce qui donne,

$$e^{-t} x(t) - 1 = -e^{-t} + 1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

2 points

C'est-à-dire,

$$x(t) = 2e^{t} - 1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

1.2) On a,

$$J_\varepsilon(1) = \frac{1}{2\varepsilon} x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 dt$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} (2e - 1)^2 + \frac{1}{2}.$$

1 pt.

2) Détermination du contrôle optimal et du trajectoire optimale.

D'après la théorie linéaire quadratique u^* est un contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée pour le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \ t \in [0,1], \\ x(0) = 1, \\ \min J_\varepsilon(u) = \min \left(\frac{1}{2\varepsilon} x^2(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t)dt \right), \end{cases}$$

si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), \ \text{pour tout } t \in [0,1], \\ \lambda(1) = -\frac{x^*(1)}{2\varepsilon}, \end{cases}$$

0,5 pts

et de plus, on a

$$u^*(t) = 2\lambda(t), \ \text{pour tout } t \in [0,1].$$

0,5 pts

Comme

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Alors, on a

$$e^{t}\lambda(t) = e\,\lambda(1), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) = e^{1-t}\lambda(1)$$

1pt.

$$= -\,e^{1-t}x^*(1)$$

$$= -\,\frac{e^{1-t}x^*(1)}{2\varepsilon}, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Par suite, on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - \dfrac{e^{1-t}}{\varepsilon}x^*(1), \text{ pour tout } t \in [0,1], \\ x^*(0) = 1. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\left(e^{-t}x^*(t)\right)' = -\,\frac{e^{1-2t}}{\varepsilon}x^*(1), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

C'est-à-dire,

$$x^*(t) = e^{t} + \left(\frac{e^{1-t} - e^{1+t}}{2\varepsilon}\right)x^*(1), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Pour $t=1$, on a

$$x^*(1) = e + \left(\frac{1-e^2}{2\varepsilon}\right) x^*(1).$$

C'est-à-dire,

$$\left(1 - \frac{1-e^2}{2\varepsilon}\right) x^*(1) = e$$

C'est-à-dire,

$$x^*(1) = \frac{2\varepsilon e}{2\varepsilon-(1-e^2)}$$

0,5 pts

Ce qui donne,

0,5 pts

$$x^*(t) = e^t + \frac{e^{2-t} - e^{2+t}}{2\varepsilon-(1-e^2)}, \text{ pour tout } t\in[0,1],$$

et

$$u^*(t) = 2\lambda(t)$$

$$= -\frac{2e^{1-t}\, x^*(1)}{2\varepsilon}$$

1 pt.

$$= -2\,\frac{e^{2-t}}{2\varepsilon-(1-e^2)}, \text{ pour tout } t\in[0,1].$$