Contrôle continu Master biomathématique et Modélisation
Université de Tlemcen, Département de Mathématiques
27 avril 2023

Exercice 1 On considère un modèle épidémique simple de type SIR (Susceptibles - Infectieux - Rétablis) donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{1}$$

où S, I et R représentent respectivement le nombre de personnes susceptibles, infectées et guéries ou décédées, et β et γ sont des constantes positives représentant respectivement le taux de transmission de la maladie et le taux de guérison ou de décès.
1. Déterminez les points d'équilibre du système et étudiez leur stabilité.
2. Tracez les courbes de solutions pour différentes valeurs des paramètres β et γ et interprétez les résultats.
3. Comment pouvez-vous utiliser ce modèle pour prédire l'évolution d'une épidémie et proposer des mesures de prévention ou de contrôle ?
4. Calculer la taille finale de l'épidémie.
4. Étudiez les limites de validité de ce modèle et proposez des extensions ou des améliorations possibles.

Exercice 2: On considère le modèle épidémique suivant:

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta SI - bS, \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI, \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - bR \tag{4}$$

1. Donner une interprétation du modèle et de ces paramètres
2. Calculer les équilibre du modèle
3. Calculer le nombre de Reproduction de base.
4. Etudier la stabilité locale et globale des équilibres.

Correction

Exercice 01 : voir le cours

Exercice 02 :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - bS \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - bR \end{cases}$$

Le modèle est definit dans la region

$$\Gamma_1 = \{ (S, I, R) \in \mathbb{R}^3_+ \ / \ S + I + R = 1 \}$$

il s'agit d'étudier un modèle SIR avec naissance et mortalité 1pt

Comme $R = 1 - S - I$, on peut réduire le modèle (1) et on obtient

$$(2) \begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - bS \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI \end{cases}$$

le système (2) sera étudié dans

$$\Gamma = \{ (S, I) \in \mathbb{R}^2_+ \ / \ 0 \leq S + I \leq 1 \}$$

Pts d'équilibre

$$\begin{cases} b - \beta S I - b S = 0 \\ \beta S I - \gamma I - b I = 0 \end{cases}$$

$P_0 = (1, 0)$ $\quad$ 0,5 pt $\qquad P_* = (S^*, I^*)$ tq $\quad$ 0,5 pt

$S^* = \dfrac{\gamma + b}{\beta}$ $\qquad I^* = \dfrac{b(1 - S^*)}{\beta S^*}$ existe si $S^* < 1$

P_* existe si $R_0 = \dfrac{\beta}{b+\gamma} > 1$ $\quad$ 1 pt

donc si $R_0 \leq 1 \Rightarrow P_0 = (1, 0)$ est le seul pt d'équilibre

si $R_0 > 1 \Rightarrow$ il y a deux pts d'équilibre P_0 et P_*

Stabilité locale de P_0 :

$$J_{P_0} = \begin{bmatrix} -b & -\beta \\ 0 & \beta - (b + \gamma) \end{bmatrix}$$

0,5 pt

$\lambda_1 = -b < 0$ et $\lambda_2 = \beta - (b + \gamma)$

ainsi P_0 est LAS si $\lambda_2 < 0$ c.a.d $R_0 < 1$

Sinon si $R_0 > 1$ P_0 est un pt selle

Si $R_0 = 1$ $\lambda_2 = 0$ et la linéarisation ne s'applique pas

Stabilité locale de P_∞

$$J_{P_\infty} = \begin{bmatrix} -\beta I^* - b & -\beta S^* \\ \beta I^* & 0 \end{bmatrix}$$ 0,5 pt

$tr J_{p^*} = -\beta I^* - b < 0$

$Det J_{p^*} = \beta^2 S^* I^* > 0$ si $R_0 > 1$

donc si $R_0 > 1$ P^* est LAS

Stabilité globale de P_0 : 3pts

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$L(S, I) = I$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt} = (\beta S - \gamma - b) I \leq I(\beta - \gamma - b) \leq 0$$ si $R_0 \leq 1$

Appliquons le principe d'invariance de La Salle

$$\Omega = \left\{ (S \cdot I) \in \Gamma : \frac{dL}{dt} = 0 \right\}$$

On sait que $\frac{dL}{dt} = 0$ ssi $I = 0$ ou

$R_0 = 1$ et $S = \frac{\gamma + b}{\beta}$

Dans le 2ème cas. on a forcément $S = \frac{b+\gamma}{\beta}$. $I = \bar{I}^{k}$

Dans le 1er cas toute solution du système (2) réduit partant de l'ensemble ou $I = 0$ satisfait

$\dot{S} = b - bS$ ainsi $S \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$

Dans les 2 cas : l'ensemble invariant dans K est $\{P_0\}$. cqfd

Stabilité globale de P^{k}. 3pts

Supposons $R_0 > 1$

le système réduit s'écrit $\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b - \beta SI - bS = P(S,I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI = Q(S,I) \end{cases}$

Posons $\alpha(S,I) = \frac{1}{I}$.

$$\frac{\partial}{\partial S}(\alpha P) + \frac{\partial}{\partial I}(\alpha Q) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{b}{I} - \beta S - \frac{bS}{I}\right) + \frac{\partial}{\partial I}(\beta S - b - \gamma)$$

$$= -\beta - \frac{b}{I} < 0 \text{ ds } \mathring{\Gamma}$$

Ainsi par le thm de Bendixon Dulac, On n'y a pas de solution périodique dans $\mathring{\Gamma}$.

Comme P^{*} est le seul pt d'équilibre LAS ds $\mathring{\Gamma}$ lorsque $R_0 > 1$ On peut déduire qu'il est GAS