Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année Master (2022/2023).
Faculté des Sciences Durée 1h30$'$, le 20/06/2023.

Rattrapage -Master Biomathématiques-
Contrôle des Systèmes (M1)

Exercice 1 (08 Points)

Soit $t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}^+$. Soit le système de contrôle **linéaire** à coefficients **non constants** suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ sur } I. \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{Où } \ A(t) \ = \ \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La résolvante $\Phi(t, t_0)$ du système homogène associé à (1) est donnée en fonction de sa **matrice fondamentale :** $M(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ de la manière suivante:

$$\Phi(t, t_0) = M(t).M^{-1}(t_0).$$

Question : Trouver la **Gramienne de contrôlabilité** associée au système (1) puis **conclure**.

Exercice 2 (12 Points)

On considère le système **linéaire contrôlé à coefficients constants** $\dot{x} = Ax + Bu$ donné par ses éléments structurels suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est **pas contrôlable**.
2. Donner une **décomposition** du système en **sous-système contrôlable** et **sous-système non contrôlable.**
3. Donner **le retour d'état linéaire** qui **stabilise** le **sous-système contrôlable**, en plaçant ses pôles en (-1).
4. Que pouvez-vous conclure maintenant sur la **stabilité asymptotique** du nouveau système **complet**?

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Correction du rattrapage -Master Biomathématiques-
Contrôle des Systèmes (M1)

Exercice 1 (08 Points)

Soit $t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}^+$. Soit le système de contrôle **linéaire** à coefficients **non constants** suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ sur } I. \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La résolvante $\Phi(t, t_0)$ du système homogène associé à (1) est donnée en fonction de sa **matrice fondamentale** $M(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ de la manière suivante: $\forall t, t_0 \in I, \quad \Phi(t, t_0) = M(t).M^{-1}(t_0)$.

Question : Trouver la **Gramienne de contrôlabilité** associée au système (1) puis **conclure**.

$$M(t_0) = \begin{pmatrix} e^{-t_0} & \frac{1}{2}e^{t_0} \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{t_0} & -\frac{1}{2}e^{3t_0} \\ 0 & e^{t_0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \forall t, t_0 \in I, \quad \Phi(t, t_0) = M(t).M^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{(t_0-t)} & \frac{1}{2}\left(e^{(t+t_0)} - e^{(3t_0-t)}\right) \\ 0 & e^{(t_0-t)} \end{pmatrix} (2points)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t, s) = \begin{pmatrix} e^{(s-t)} & \frac{1}{2}\left(e^{(t+s)} - e^{(3s-t)}\right) \\ 0 & e^{(s-t)} \end{pmatrix}; B(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t, s)B(s) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t, s \in I.$$

Et donc, la Gramienne de contrôlabilité est donnée par:

$$\begin{aligned} W_c(t_1, t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)B(s)B^T(s)\Phi^T(t_1, s)ds \quad (2points) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} e^{-t_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t_1} & 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} e^{-2t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ds \\ W_c(t_1, t_0) &= \begin{pmatrix} (t_1 - t_0)e^{-2t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (2points) \end{aligned}$$

Conclusion: Comme $W_c(t_1, t_0)$ n'est pas inversible, alors le système n'est pas contrôlable. ($2points$)

Exercice 2 (12 Points)

On considère le système linéaire contrôlé donné par ses éléments structurels suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est pas contrôlable.

   La matrice de contrôlabilité de Kalman associée au système considéré est :

   $$\varphi = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1point)$$

   Puisque $rg\varphi = 2 < 3$, alors le système n'est pas contrôlable, nous pouvons aussi conclure que le sous-système contrôlable est de dimension 2. $(1point)$

2. Donner une décomposition du système en sous-système contrôlable et sous-système non contrôlable.

   La matrice de passage qui permet la décomposition du système en sous-système contrôlable et non contrôlable est formée par deux colonnes linéairement indépendantes de φ, complétées par une colonne de la base canonique de sorte à former une matrice inversible, (théorème de la base incomplète).

   Par exemple :$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.(1point)$

   Alors,

   $$\begin{aligned} A^* &= TAT^{-1}, \quad B^* = TB, \quad \overline{x} = Tx.(1point) \\ A^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (1point) \\ B^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.(1point) \end{aligned}$$

   Le sous-système contrôlable est donné par la paire : $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   i.e.:

   $$\dot{\overline{x}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}_{(2,1)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

   Vérification: $\varphi_1 = (B_1, A_{11}B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, rg\varphi_1 = 2.$

   Le sous système non contrôlable est donné par l'équation scalaire restante:

   $$\dot{\overline{x_3}} = -\overline{x_3} \quad (1point)$$

3. Donner le retour d'état linéaire qui stabilise le sous-système contrôlable, en plaçant ses pôles en (-1).

   On remarque d'abord que les valeurs propres de la matrice $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont $-i, i$ c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux à partie réelle nulle. Chacune d'entre elles est de multiplicité égale à 1, ce qui fait que l'origine est stable mais pas attractive. Nous n'avons donc pas la stabilité asymptotique.

Maintenant, puisque la paire (A_{11}, B_1) est contrôlable, il existe une matrice gain $K = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix}$ telle que la matrice $(A_{11} + B_1 K)$ soit asymptotiquement stable.

Nous pouvons aussi placer les pôles de cette matrice en (-1).

$$\begin{aligned}
(A_{11} + B_1 K) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & k_1 - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\det_{(A_{11}+B_1K)}(\lambda) &= \lambda^2 - k_2 \lambda - (k_1 - 1) \,.(1 point)
\end{aligned}$$

Pour placer les pôles en -1, on doit avoir: $\lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 - 1) = (\lambda + 1)^2 .(1 point)$

Ce qui donne, par identification:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} -k_2 = 2 \\ -(k_1 - 1) = 1 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_2 = -2 \\ k_1 = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow K = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} (1 point)
\end{aligned}$$

Le contrôle stabilisant et plaçant les pôles en (-1) est donc donné par :

$$u(x) = Kx = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} .(1 point)$$

4. Que pouvez-vous conclure maintenant sur la stabilité asymptotique du nouveau système complet?

On a $(A_{11} + B_1 K) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le sous système d'ordre (2×2) a été stabilisé asymptotiquement par retour d'état statique et ses pôles sont palcés en (-1) :

$$\dot{\overline{x}}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}_{(2,1)}$$

Ensuite, la $3^{ème}$ composante du système est donnée par :

$$\dot{\overline{x_3}} = -\overline{x_3}$$

Elle se comporte en e^{-t}, elle est donc asymtotiquement stable.

Le système à tois composantes avec le retour d'état statique $u(x)$ donné plus haut s'écrit alors :

$$\dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}$$

On conclut par observation que la matrice d'ordre (3×3) correspondante au système ci-dessus n'admet que (-1) comme valeur propre. Il est donc asymptotiquement stable.$(1 point)$.