Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Final : Méthodes de Réduction I

18/01/ 2023

Durée : 1h30

Exercice 1 :

Soit le problème singulièrement perturbé

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= -x + y^3, \quad x(0) = \alpha \\ \dot{y} &= x + \varepsilon,\ y(0) = \beta. \end{aligned} \quad 0 < \varepsilon << 1,$$

où les conditions initiales ne dépendent pas de ε. Etablir avec soin l'équation de la couche limite et les problèmes réduits éventuels de (P_ε). Appliquer le théorème de convergence de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides en en vérifiant toutes les hypothèses et donner les approximations de la solution du problème sur le plus grand intervalle de temps positif possible (inutile de calculer les solutions de comparaison).

Dessiner soigneusement les trajectoires approximatives dans l'espace (xoy) pour $(\alpha, \beta) = (2,1),\ (-2,-1)$.

Bonus : comment dessineriez-vous la trajectoire approximative de condition initiale $(\alpha,\beta) = (2,0)$? (Observer le problème perturbé (P_ε)).

Exercice 2 :

Considérons le problème de Cauchy non autonome singulièrement perturbé

$$(\Pi_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = \ln(t+1) - \varepsilon y - x, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = x - \varepsilon y t, & y(0) = y_0. \end{cases}$$

Expliquer comment vous pouvez appliquer à (Π_ε) le théorème de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides sur un intervalle de temps borné.

Appliquer alors le théorème et donner explicitement l'approximation de la phase lente.

Exercice 3 :

Considérons le problème singulièrement perturbé

$$(\Sigma_\varepsilon)\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -x - y, & x(0) = x_0, \\ \varepsilon\dot{y} = x - y^3, & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = x^2 - y - z + \varepsilon, & z(0) = z_0, \quad 0 < \varepsilon << 1. \end{cases}$$

1. Montrer, à l'aide d'une fonction de Lyapounov quadratique, que la variété lente est globalement attractive.

2. Calculer, en justifiant toutes les étapes, la limite de la solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ de (Σ_ε) quand $\varepsilon \to 0$ et $t \to +\infty$. Peut-on déduire que l'origine est un point d'équilibre attractif de (Σ_ε) ?

Bonus : Représenter dans l'espace (xyz) la trajectoire approximative de condition initiale $(1,1,1)$.

Citation : « Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie. »
- ISOCRATE (436 avant JC - 338 avant JC)-

Corrigé du Final Méthodes de Perturbation I
AU 22/23 Master BioMod.

Exercice 1 : [06 pts]

- Notons d'abord que le système considéré a la propriété d'existence et d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée. Il en sera donc aussi le cas pour les équations d'approximation. 0,25
- (ER) : $x' = -x + y^3$, $(') = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, y paramètre. 0,25
- Variété lente : $-x + y^3 = 0 \Leftrightarrow x = h(y) := y^3$ continue, isolée (car unique) pour y dans un compact $K \subset \mathbb{R}$ arbitraire. 0,5
- Attractivité : $\frac{\partial}{\partial x}(-x + y^3) = -1 < 0$ $\forall y \in K$. Les équilibres de (ER) sont donc A.S. unif^t / $y \in K$. 0,25
(La variété lente est attractive.
- (EL) : $\dot{y} = y^3$, $y \in \mathring{K}$ 0,25
- On suppose que $\beta \in \mathring{K}$. α est toujours dans le bassin d'attraction de $h(\beta) = \beta^3$ car les équilibres de (ER) sont globalement attractifs pour tout $y \in K$. 0,25
- (ECL) $x' = -x + \beta^3$, $x(0) = \alpha$ 0,5
de solution $\tau \mapsto \tilde{x}(\tau)$, $\tau \geq 0$
- (RR) $\dot{y} = y^3$, $y(0) = \beta$, $y \in \mathring{K}$ 0,25
de solution $t \mapsto \bar{y}(t)$.

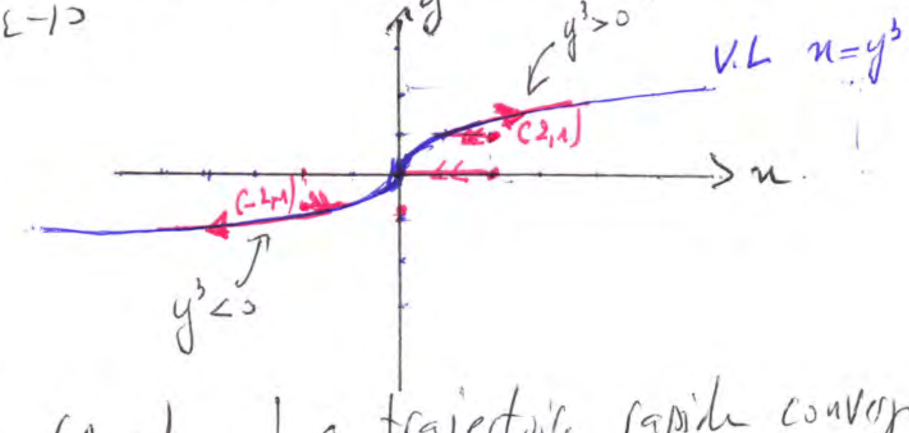
- Notons que (EL) a pour seul équilibre $y = 0$ et qu'il est répulsif. On ne peut donc pas appliquer le théorème de Tikhonov pour les temps infinis! 0,75

- Soit $T > 0$ fixé dans l'intervalle de définition de $t \longmapsto \bar{y}(t)$. D'après le théorème de Tikhonov pour les systèmes lents-rapides, $\exists\, \varepsilon^* > 0$:
$\forall \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon^* \Rightarrow$ La solution $(u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ de (P_ε) est définie au moins sur $[0,T]$ et vérifie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(\varepsilon c, \varepsilon) = \tilde{u}(c), \quad \forall c \geq 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \forall t \in [0,T]$$ 1.5

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t,\varepsilon) = h(\bar{y}(t)) = \bar{y}^3(t), \quad \forall t \in]0,T].$$



1.5

- $(\alpha, \beta) = (2, 0)$. La trajectoire rapide converge vers $u = 0$, avec le paramètre y figé en 0.
Le (PR) est : $\dot{y} = y^3$, $y(0) = 0$ de solution $y(t) \equiv 0$!
Le théorème de Tikhonov fournit une solution triviale.
Cependant, pour la vraie solution, $\dot{y} = u + \varepsilon$, ~~$\geq 0$~~
Si $u \geq 0$, $\dot{y} > 0$ d'où

Bonus

Exercice 2 : [06 pts]

- On augmente le système pour en faire un problème de Cauchy autonome :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \ln(t+1) - \varepsilon y - x, & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = x - \varepsilon y t, & y(0) = y_0 \\ \dot{t} = 1 & t(0) = 0. \end{cases}$$

0,5

- (ER) : $x' = \ln(t+1) - x$, y, t paramètres
$(') = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$.

0,5

- (V.L) $x = \ln(t+1) = h(t, y)$.
h est continue pour $t > -1$ et elle est isolée car unique

0,5

- Attractivité : $\frac{\partial}{\partial x}(\ln(t+1) - x) = -1 < 0 \quad \forall t, y \in K \subset \mathbb{R}^2$
K compact de $\mathbb{R}^2$ tq $K = [0, T] \times [y_1, y_2]$.

0,25

- (EL) $\begin{cases} \dot{y} = \ln(t+1) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$ $\quad (t, y) \in \mathring{K}$

0,25

- L'unicité est vérifiée pour tous les problèmes.

0,25

- L'hypothèse de positionnement des conditions initiales (TS) est aussi vérifiée grâce à la globalité de l'attractivité de la variété lente, pourvu que $y \in]y_1, y_2[$

0,25

- (ECL). $x' = \ln(0+1) - x$, $x(0) = x_0$
$\Leftrightarrow x' = -x$, $x(0) = x_0$.
de solution $\tilde{x}(\tau) = x_0 e^{-\tau}$, $\tau \geq 0$.

0,5

• (PR) $\begin{cases} \dot{y} = \ln(t+1), & y(0)=y_0 \\ \dot{t} = 1, & t(0)=0 \end{cases}$ 0,25

de solution $(\bar{y}(t), \bar{t}(t))$ où $\bar{t}(t) = t$. 0,25

Le calcul de $\bar{y}(\cdot)$ se fait par parties.

$$\frac{dy}{dt} = \ln(t+1) \Leftrightarrow dy = \ln(t+1)\,dt$$
$$\Rightarrow \int dy = \int \ln(t+1)\,dt.$$

D'une part, $\int dy = y + C$, $C \in \mathbb{R}$.

D'autre part, en posant $\begin{cases} u = \ln(t+1) \Rightarrow du = \frac{1}{t+1}dt \\ dv = dt \Rightarrow v = t \end{cases}$

on a $\int \ln(t+1)\,dt = t\ln(t+1) - \int \frac{t}{t+1}\,dt$

$$= t\ln(t+1) - \int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= t\ln(t+1) - t + \ln(t+1) + C$$

En définitive, $y(t) = (t+1)\ln(t+1) - t + C$ 1

Comme $y(0) = y_0$, on a $\bar{y}(t) = (t+1)\ln(t+1) - t + y_0$, $t \geq 0$.

• Soit $T > 0$ fixé. D'après le théorème de Tikhonov, pour ε assez petit, la solution $(x(\cdot,\varepsilon), y(\cdot,\varepsilon))$ de (Π_ε) est définie au moins sur $[0,T]$ et vérifie

$\lim_{\varepsilon \to 0} x(\varepsilon\tau, \varepsilon) = \tilde{x}(\tau) = x_0 e^{-\tau}$, $\forall \tau \geq 0$ 1.5

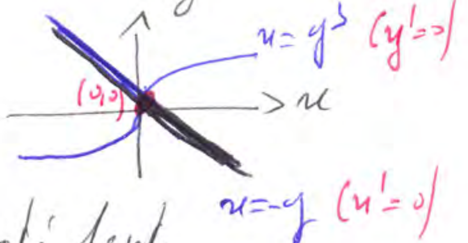
$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t) = (t+1)\ln(t+1) - t + y_0$, $\forall t \in [0,T]$

$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = h(t, \bar{y}(t)) = \ln(t+1)$, $\forall t \in]0,T]$

Exercice 3 : [8 pts]

1) Pour montrer que la variété lente est globalement attractive, on doit d'abord la définir.

• (E.R) : $\begin{cases} x' = -x-y \\ y' = x - y^3 \end{cases}$, t paramètre $(') = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. 0,25



• Equilibres de (ER) pour t fixé : 0,5
(0,0) est donc le seul équilibre.
Comme t est quelconque, la variété lente est représentée par l'axe des t.

$$h : K \underset{cpt}{\subseteq} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x,y) = (h_1(t), h_2(t)) = (0,0)$$ 1

isolée et continue.

• Attractivité globale de la variété lente $\Leftrightarrow$ l'attractivité globale de $(0,0)$ pour (ER).

Soit $V(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2$ définie positive
$a>0,\ b>0$

$\dot{V}(x,y) = (\ldots) = -ax^2 - by^4$. définie négative pour tout $a,b>0$ (on peut choisir aussi $a=b=1$).

Donc $(0,0)$ est GAS car V est radialement non borné ! D'où la variété lente est globalement attractive (unif^t / $t \in K$ car V indépendante de t). 1.5

2) • (E.L) $\dot{z} = -z$, $z \in \mathring{K}$, $0 \in \mathring{K}$ ~~de solution~~ 0,25

Il y a propriété d'unicité pour tous les problèmes. 0,25

• (ECL) : $\begin{cases} u' = -u - y, & u(0) = u_0 \\ y' = u - y^3, & y(0) = y_0 \end{cases}$ 0,25

de solution $(\tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau))$, $\forall \tau \geq 0$,

car $(\tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} (0,0)$.

• (PR) $\dot{z} = -z$, $z(0) = z_0$ 0,25

de solution $\bar{z}(t) = z_0 e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

0 est en effet un équilibre G.A. stable pour E.L 0,25

D'après le théorème de Tikhonov pour les temps infinis, pour ε assez petit, la solution $(u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ de (Σ_ε) est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie principalement

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = \bar{z}(t) \quad \forall t \geq 0 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) = (h_1(\bar{z}(t)), h_2(\bar{z}(t))) = (0,0) \quad \forall t > 0 \end{cases}$$ 1

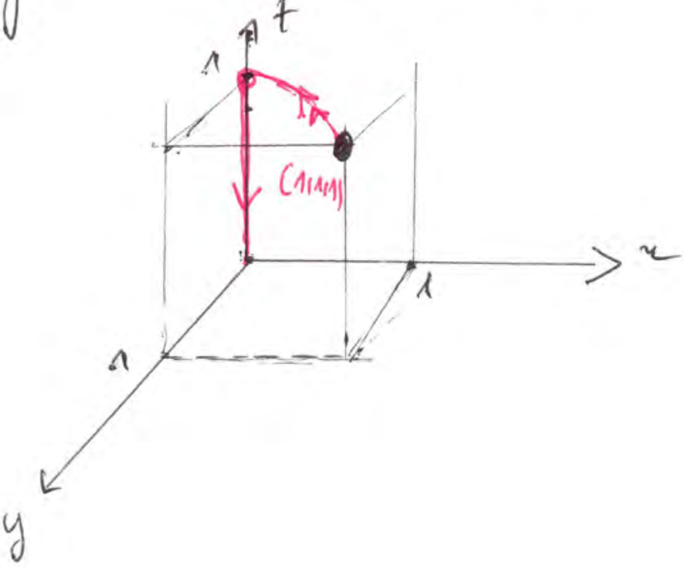
Comme $\bar{z}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, on a,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ t \to +\infty}} (u(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)) = (0,0,0).$$ 1

- Mais on constate que $(0,0,0)$ n'est pas un équilibre de $(\Sigma\varepsilon)$!

En effet, en $(0,0,0)$, $\dot{t} = \varepsilon \neq 0$ $\underline{\forall \varepsilon > 0}$

Donc la limite précédente ne signifie pas que l'origine de $(\Sigma\varepsilon)$ est G.A.S.



1

Bonus
1