Département de Mathématiques
Université de Tlemcen

Module: Systèmes Dynamiques

Examen (Janvier 2023, durée 1h30').

Exercice1:05 pts
Soit le système

$$(1)\begin{cases} x' = y - x\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) \\ y' = -x - y\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) \end{cases}$$

a) Ecrire le système en coordonées polaires et montrer que

$$r' = rf\left(r, \theta\right)$$

où f est une fonction à déterminer.

b)Montrer que $(0,0)$ est le seul pont d'équilibre du système (1).
c) calculer

$$\max_{\theta} f\left(r, \theta\right) \text{ et } \min_{\theta} f\left(r, \theta\right).$$

d) Monter que $r' < 0$ pour r assez grand et $r' > 0$ pour r assez petit.
e) En déduire que (1) admet une solution périodique.
Solution:a) on a

$$\begin{aligned} r' &= r\left(3 + 2r\cos\left(\theta\right) - r^2\right) = rf\left(r, \theta\right) \\ \theta' &= -1 \end{aligned}$$

b) Un point d'équilibre vérifie

$$\begin{cases} x' = y - x\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) = 0 \\ y' = -x - y\left(x^2 + y^2 - 2x - 3\right) = 0 \end{cases}$$

cequi donne

$$x^2 + y^2 = 0$$

et

$$x = y = 0$$

$$\max_{\theta} f\left(r, \theta\right) = f(r, 0) = 3 + 2r - r^2$$

$$\min_{\theta} f\left(r, \theta\right) = f(r, \pi) = 3 + 2r - r^2$$

d) **02 points** Monter que $r' < 0$ pour r assez grand et $r' > 0$ pour r assez petit.

Solution.Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} r' &\leq r(3 + 2r - r^2) < 0 \text{ pour } r > 3, \\ r' &\geq r(3 - 2r - r^2) > 0 \text{ pour } r < 1. \end{aligned}$$

e) **02 points** En déduire que (1) admet une solution périodique.

Solution: On applique le th.de Poincaré Bendixon sur la région

$$D_\varepsilon = \left\{ (x, y) : 1 - \epsilon < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 - \epsilon \right\}$$

ensuite nous considérons l'ensemble

$$D = \cap_{\varepsilon \geq 0} D_\varepsilon$$

Exercice 2.05 pts

Soit

$$(2) \qquad x'(t) = A(t)x, x \in R^2$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

1) Pour chaque t fixé , calculer les valeurs propres.

2) Montrer que

$$y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t)e^{\frac{t}{2}} \\ \sin(t)e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

est une solution de (2).

3) Calculer $\|y(t)\|^2$, où $\|(a, b)\|^2 = a^2 + b^2$.

4) Le point d'équilibre $x = 0$ est -il stable ?.Conclure.

Sol: voir le cours

Exercice 3. 05 pts Soit le système

$$(3) \begin{cases} x' = 4y \\ y' = -x + y - x^2y - 4y \end{cases}$$

a) Donner la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.

b) Soit

$$V(x, y) = x^2 + 4y^2.$$

Montrer que $V' \leq 0$ si $x^2+4y^2>2$.
c) En déduire l'existence d'une solution périodique.

Solution:
a) On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre.La Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que $(0,0)$ est un foyer instable.
b) on a

$$\frac{1}{2}V'(x(t),y(t)) = 4y^2\left(1-x^2-4y^2\right)$$

ainsi si $x^2+4y^2>2$, on a $V' \leq 0$.
c) Comme $(0,0)$ est instable, on peut former un cercle, surlequel le champ est sortant.La fonction V joue le rôle d'une fonction de Lyapounov, décroissante sur l'ellipse $x^2+4y^2=2$,
d'aprés le thm.de Poincaré Bendixon, il existe un cycle limite àl'intérieur de la region

$$\left\{(x,y) : 0 < x^2+4y^2 < 2\right\}$$

Exercice 4: **05 pts** Soit le système

$$(2) \qquad \begin{cases} x't) = -x + x\left(x^2+y^2\right) \\ y'(t) = -y + y\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble

$$S = \left\{(x,y) : x^2+y^2=1\right\}$$

est positivement invariant i.e si $(x(0),y(0)) \in S$, alors $(x(t),y(t)) \in S$, pour tout $t \geq 0$.

Sol: Soit

$$r^2 = x^2+y^2$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d\left(x^2+y^2\right)}{dt} &= 2xx' + 2yy' = 2x\left\{-x + x\left(x^2+y^2\right)\right\} + 2y\left\{-y + y\left(x^2+y^2\right)\right\} \\ &= -2r^2 + 2r^4 = -2r^2\left(1-r^2\right) \end{aligned}$$

il est clair que

$$r^2 = 1$$

est point d'équilbre ,ainsi Sest positivement invariant.