Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen. $1^{ère}$ année Master (2022/2023).
Faculté des Sciences Durée 1h30′, le lundi 16/01/2023.

Examen Final -Master Biomathématiques-
Contrôle des Systèmes

Exercice 1 (06 Points)

Soit $T > 0$. Soit le système linéaire contrôlé scalaire :

$$(\Sigma_c) : \begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (a, b > 0)\,, t \in [0, T]\,.$$

1. Expliquer pourquoi le système (Σ_c) admet une solution unique globale définie sur $[0, T]$.
2. Donner la Gramienne de contrôlabilité associée au système (Σ_c) puis conclure.
3. Trouver l'expression du contrôle qui transfère en un temps fini $T > 0$, le point initial x_0 au point $x_1 = x(T) = 0$.

Exercice 2 (08 Points)
On considère le système linéaire contrôlé-observé suivant, donné par ses éléments structurels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est pas observable.
2. Donner une décomposition du système en sous-système observable et sous-système non observable.
3. Synthétiser alors un observateur de Luemberger permettant de stabiliser le sous-système observable par bouclage dynamique.

Exercice 3 (06 points)
Soit $(T > 0)$. On considère un modèle d'évolution de la maladie du SIDA in vivo contrôlé-observé, donné par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = S(t)\,(1 - S(t))\,(1 + u_1) - S(t)V(t)(1 + u_2) \\ \dot{I}(t) = -I(t) + S(t)V(t)(1 + u_2) \\ \dot{V}(t) = -V(t) + I(t) + S^2(t)u_2 \\ y(t) = V(t) \end{cases} \qquad (t \in [0, T]) \qquad \text{(M)}$$

Sur le domaine : $\Omega = \{x = (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 /\ \ 0 < S < 1,\ \ V > 0\}$. S, I, V représentent respectivement : la quantité de cellules saines, de cellules infectées et de virus présents dans le sang. $u_{1,2} \in \mathbb{R}$.

La sortie y est choisie comme la quantité de virus en libre circulation dans le sang V, car c'est une quantité que nous pouvons mesurer régulièrement par des prises sanguines.

1. Écrire le modèle (M) sous la forme : $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y(x) = h(x) \end{cases}$
2. En utilisant le degré relatif, donner la forme de Fliess du système en considérant $u_2 = 0$.
3. En utilisant le théorème de Chow-Rashevski discuter de la contrôlabilité globale du système sans dérive: $\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ sur Ω.

Remarque: L'usage des téléphones portables est strictement interdit. Bon courage.

Correction de l'Examen Final, Master Biomathématiques, Contrôle des Systèmes

Exercice 1 (06 Points)

Soit $(T > 0)$ et soit le système:

$$(\Sigma_c) : \begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} , (a, b > 0) , (t \in [0, T]) .$$

1. Expliquer pourquoi le système (Σ_c) admet une solution unique globale sur $[0, T]$.

   Le système (Σ_c) étant un problème de Cauchy **linéaire**, il vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz, d'existence et d'unicité d'une solution globale définie sur $[0, T]$. **(1pt).**

2. Donner la Gramienne de contrôlabilité associée au système (Σ_c) puis conclure.

   La Gramienne de contrôlabilité dans le cas des systèmes de contrôles linéaires à coefficients constants est donnée par :

   $$P(T) = \int_0^T e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt \qquad \textbf{(1pt)}$$

   Dans le cas scalaire, cela donne:

   $$\begin{aligned} P(T) &= \int_0^T e^{-ta} b b e^{-ta} dt \\ &= \frac{b^2}{-2a} \left[e^{-2at} \right]_0^T \quad (a > 0) \\ &= -\frac{b^2}{2a} \left(e^{-2aT} - 1 \right) \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

   Conclusion: Puisque $T > 0$ alors $P(T)$ est inversible ce qui fait que le système est contrôlable. **(1pt)**

3. Trouver l'expression du contrôle qui transfère le point initial au point $x_1 = x(T) = 0$.

   Rappelons que dans le cas général, l'expression du contrôle qui transfère un point initial x_0 en un point final x_1 en un temps fini $T > 0$ est donnée par:

   $$u^*(t) = B^T e^{(T-t)A^T} P^{-1}(T) \left(x_1 - e^{TA} x_0 \right) \qquad \textbf{(1pt)}$$

   On a $P^{-1}(T) = \dfrac{1}{P(T)} = \dfrac{-2a}{b^2 \left(e^{-2aT} - 1 \right)}$

   Et dans le cas scalaire:

   $$\begin{aligned} u^*(t) &= b e^{-a(T-t)} \frac{-2a}{b^2 \left(e^{-2aT} - 1 \right)} \left(x_1 - e^{-aT} x_0 \right) \\ &= b e^{-a(T-t)} \frac{-2a e^{2aT}}{b^2 \left(1 - e^{2aT} \right)} \left(0 - e^{-aT} x_0 \right) \\ &\Rightarrow \; u^*(t) = \frac{2a x_0}{b \left(1 - e^{2aT} \right)} e^{at}. \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2 (08 Points)

On considère le système linéaire contrôlé-observé suivant, donné par ses éléments structurels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que le système donné n'est pas observable.

   La matrice d'observabilité de Kalman est donnée par:

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, rg(téta) = 2 < 3, \qquad \textbf{(1pt)}$$

donc le système n'est pas observable.

2. Donner une décomposition du système en sous-système observable et sous-système non observable.

   Pour former la matrice de passage T, nous choisissons les deux premières lignes linéairement indépendantes de téta, que nous complétons par une ligne appropriée de la base canonique, de façon à former une base de $\mathbb{R}^3$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \textbf{(0.5pt)}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \textbf{(0.5pt)}$$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= TAT^{-1}\textbf{(0.25pt)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

$$\overline{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)}$$

$$\overline{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)}$$

Avec:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} ; A_{22} = (-1) \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} ; B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; B_2 = (1) \end{aligned}$$

Vérification:
On a : $C_1 A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $téta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $rg(téta_1) = 2$.
$\Rightarrow$ Le sous-système de dimension 2 défini par la paire (A_{11}, C_1) est bien observable. **(0.25pt)**
Le système décomposé est donné par:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u \text{ (Partie observable).}\mathbf{(0.25pt)} \\ \begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} + (-1)\,(\overline{x}_3) + (1)\,.u \text{ (Partie non observable).}\mathbf{(0.25pt)} \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} .\mathbf{(0.25pt)} \end{cases}$$

3. Synthétiser alors un observateur de Luemberger permettant de stabiliser le sous-système observable par bouclage dynamique.

   On pose içi : $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}$ pour simplifier les notations.

   L'observateur dynamique de Luemberger est donné par la formule :

$$\dot{\hat{z}} = A_{11}\hat{z} + B_1 u + L(C_1\hat{z} - y)\mathbf{(0.5pt)}$$

   Pour stabiliser le système en boucle dynamique, on pose l'erreur d'estimation :

$$\begin{aligned} e(t) &= \hat{z}(t) - z(t) \\ &\Rightarrow \dot{e}(t) = (A_{11} + LC_1)\, e(t)\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

   Il suffit maintenant de considérer le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_{11}z + B_1 u \\ \dot{e} = (A_{11} + LC_1)e \end{cases}, \mathbf{(0.25pt)} \tag{2}$$

   et le bouclage dynamique : $u = K\hat{z}$ **(0.5pt)** , on trouve:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{11}z + B_1 u \\ &= A_{11}z + B_1 K\hat{z} \\ &= A_{11}z + B_1 K(e + z) \\ &= (A_{11} + B_1 K)\, z + B_1 K e\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

   Le système (2) devient:

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 K & BK \\ & A_{11} + LC_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ e \end{pmatrix} \mathbf{(0.25pt)} \tag{3}$$

Où $K = (K_2, K_1)$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$.

Pour que ce système (3) soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit que les matrices $(A_{11} + B_1 K)$ et $(A_{11} + LC_1)$ soient de Hurwitz. [Car le spectre de la matrice dans (3) est formé par l'union des spectres de $(A_{11} + B_1 K)$ et de $(A_{11} + LC_1)$].**(0.25pt)**

Comme le sous-système est observable, nous assurons l'existence de la matrice gain L. Il reste à montrer que ce sous-système est contrôlable pour assurer l'existence de la matrice gain K.

La matrice de contrôlabilité associée au sous-système est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi &= (B_1, A_{11} B_1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ rg\varphi &= 2 \end{aligned}$$

Par le critère de Kalman, le sous-système est contrôlable.**(0.25pt)**

$$\begin{aligned} (A_{11} + B_1 K) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_2 & 1 + 2k_1 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} \\ \det_{(A+BK)}(\lambda) &= \lambda^2 - (2k_2 + k_1)\lambda - k_2 \textbf{(0.25pt)} \\ (A_{11} + LC_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \det_{(A+LC)}(\lambda) &= \lambda^2 - l_1 \lambda - l_2 \textbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz, on doit avoir :

$$l_1 < 0, l_2 < 0 \text{ et } k_2 < 0, k_1 < -2k_2 \textbf{(0.25pt)}$$

Par exemple, on choisit : $K = (-1, 0)$ et $L = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.**(0.25pt)+(0.25pt).**

(Tous les choix qui vérifient le critère Routh-Hurwitz sont comptés juste.)

Dans ce cas, l'observateur dynamique de Luemberger est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = (A_{11} + LC_1) \hat{z} + B_1 u - Ly$$

$$\dot{\hat{z}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{z} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} y \textbf{(0.25pt)}$$

Ou alors, une écriture plus raffinée en considérant le contrôle du système initial et sa sortie comme des entrées à l'observateur dynamique de Lumberger on a :

$$\dot{\hat{z}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{z} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (06 points)

$(T > 0)$ .On considère un modèle d'évolution de la maladie du SIDA in vivo contrôlé-observé, donné par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = S(t)\left(1 - S(t)\right)(1 + u_1) - S(t)V(t)(1 + u_2) \\ \dot{I}(t) = -I(t) + S(t)V(t)(1 + u_2) \\ \dot{V}(t) = -V(t) + I(t) + S^2(t)u_2 \\ y(t) = V(t) \end{cases} \tag{M}$$

Sur le domaine d'état : $\Omega = \{x = (S, I, V) \in \mathbb{R}^3 / \ 0 < S < 1, \ , \ V > 0\}$ et $u_{1,2} \in \mathbb{R}$.

1. Écrire le modèle (M) sous la forme : $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y(x) = h(x) \end{cases}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} S(1-S) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix} ; g_1(x) = \begin{pmatrix} S(1-S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; g_2(x) = \begin{pmatrix} -SV \\ SV \\ S^2 \end{pmatrix} ; h(x) = V.\mathbf{(1pt)}$$

En utilisant le degré relatif, donner la forme de Fliess du système en considérant $u_2 = 0$.

On a:

$$L_{g_1}h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1-S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{(0.25pt)}$$

Puis

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1-S) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix} \\ &= I - V\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

Et

$$L_{g_1}\left(L_f h(x)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1-S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{(0.25pt)}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} L_f^2 h(x) &= L_f\left(L_f h(x)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1-S) - SV \\ -I + SV \\ I - V \end{pmatrix} \\ &= -2I + V + SV\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} L_{g_1}\left(L^2{}_f h(x)\right) &= \begin{pmatrix} V & -2 & S+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(1-S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= VS(1-S) \\ &\neq 0 \text{ sur } \Omega.\mathbf{(0.25pt)} \end{aligned}$$

Finalement, on a:

$$\begin{cases} L_{g_1}h(x) = 0 \\ L_{g_1}\left(L_f h(x)\right) = 0 \\ L_{g_1}\left(L^2{}_f h(x)\right) = VS(1-S) \neq 0, \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Ce qui veut dire que le degré relatif est $r = 3$. **(0.25pt)**

Le système est alors complètement linéarisable, en considérant le changement de variables :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L^2{}_f h(x) \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)} \tag{5}$$

Et le contrôle:

$$u_1(x(t)) = \frac{v(t) - L_f^3\left(h(x)\right)}{L_{g_1}\left(L^2{}_f h(x)\right)} \textbf{(0.25pt)} \tag{6}$$

Où $v(t)$ est le nouveau contrôle. Donc,

$$\begin{pmatrix} \dot{Z_1} \\ \dot{Z_2} \\ \dot{Z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \\ v \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)}$$

On trouve alors la forme canonique linéaire et contrôlable de Fliess:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)\textbf{(0.25pt)}$$

3. En utilisant le théorème de Chow-Rashevski discuter de la contrôlabilité globale du système sans dérive : $\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$ sur Ω.

   On commence par remarquer que Ω est bien un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$, **(0.25pt)**

   Puis, on calcule le crochet de Lie des deux champs de vecteurs $C^\infty\left(\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\right), g_1$ et g_2

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2] &= Dg_2.g_1 - Dg_1.g_2 \\
&= \begin{pmatrix} -V & 0 & -S \\ V & 0 & S \\ 2S & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\left(1-S\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(1-2S\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -SV \\ SV \\ S^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -VS\left(1-S\right) \\ VS\left(1-S\right) \\ 2S^2\left(1-S\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -SV(1-2S) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -VS^2 \\ VS\left(1-S\right) \\ 2S^2\left(1-S\right) \end{pmatrix} \textbf{(1pt)}
\end{aligned}$$

   La matrice formée par $(g_1, g_2, [g_1, g_2])$ est:

$$(g_1, g_2, [g_1, g_2]) = \begin{pmatrix} S\left(1-S\right) & -SV & -VS^2 \\ 0 & SV & VS\left(1-S\right) \\ 0 & S^2 & 2S^2\left(1-S\right) \end{pmatrix} \textbf{(0.25pt)}$$

   Puisque

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \Omega, \det\left(g_1, g_2, [g_1, g_2]\right) = S\left(1-S\right).SV.S^2(1-S) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= S^4\left(1-S\right)^2 V \neq 0.\textbf{(0.5pt)}
\end{aligned}$$

   Alors l'algèbre de Lie engendrée par la famille des champs de vecteurs $\{g_1, g_2\}$ est égale à $\mathbb{R}^3$ et cela $\forall x \in \Omega$, *i.e.*

$$\forall x \in \Omega, Lie\{g_1, g_2\} = \mathbb{R}^3, \textbf{(0.25pt)}$$

   Le théorème de Chow-Rashevski nous permet de conclure la contrôlabilité globale du système donné sur Ω.**(0.25pt)**