Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2022/2023*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Partiel: **Méthodes de Réduction** I,
1^{er} décembre 2022 [1h30]

EXERCICE I :

Pour chacun des problèmes perturbés scalaires suivants, où $0 < \varepsilon << 1$, calculer la solution du problème réduit et examiner le type d'approximation de la solution des problèmes perturbés (C^0? $O(\varepsilon)$? $O(\varepsilon^2)$? $O(\varepsilon^N)$?) sur des intervalles de temps finis ou infinis. Procéder méthodiquement et justifier vos réponses.

$$x' = -x + \varepsilon x\sqrt{x^2+1}\,,\ \ x(0) = 1,$$
$$x' = -x^3 + \varepsilon^2(x^2-1),\ \ x(0) = 1,$$
$$x' = 1 + \varepsilon\sqrt{x-2} + \cos\varepsilon,\ \ x(0) = 1.$$

EXERCICE II :

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $\dot{u} + u^2 = 0$.
2. On considère le problème de Cauchy suivant, où ε est un petit paramètre réel

positif,

$$(P_\varepsilon)\ \ \begin{array}{l} \dot{x} = -x + \tan\varepsilon + \varepsilon^2 y, \quad x(0) = \alpha \\ \dot{y} = \varepsilon x - (1+\varepsilon)y^2,\ y(0) = \beta > 0. \end{array}\ \ 0 < \varepsilon << 1.$$

1/ Justifier l'existence d'approximations uniformes (sans les calculer) sur un un intervalle de temps borné de l'ordre de ε^N pour tout N de la solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ de (P_ε).

2/ Donner les systèmes d'approximations $O(\varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$ un intervalle de temps borné. Calculer la solution de l'approximation $O(\varepsilon)$ seulement.

3/ Peut-on étendre cette approximation à un intervalle de temps non borné? Justifier.

"Ecrire liberté sur le bord d'une plage, c'est déjà avoir la liberté de l'écrire. Même si la mer efface ce mot : la liberté demeure". Jean-Michel Wyl