Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
Module: Systèmes Dynamiques
Master I, 2022-2023

Corrigé contrôle continu

Exercice1:07 pts Soit l'équation

$$(1) \qquad x'(t) = x^2 + (2-\mu)\,x - 2\mu,\ \mu \text{ un paramètre réel.}$$

a) Déterminer les points d'équilibre de (1).
Sol: les points d'équilibre sont $x^* = -2$, and $x^* = \mu$.
b) Etudier la stabilité de chaque point d'équilibre
Sol: Soit $f_\mu(x) = x^2 + (2-\mu)\,x - 2\mu$, alors $\frac{df_\mu(x)}{dx} = 2x + (2-\mu)$. On enduit facilement la stabilité
c) Etudier a) et b) en utilisant le graphe de la fonction $f_\mu(x) = x^2 + (2-\mu)\,x - 2\mu$.
Sol: L'étude du graphe de $f_\mu(x)$ permet de déduire la stabilité lorsque $2 = \mu$.
Barème: 02+02+03

Exercice 2: 06 pts Soit le système

$$\{X'(t) = AX(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Etudier la nature du point d'équilibre. Donner la variété stable.
Sol: a) les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$, and $\lambda_2 = -3$. Les vecteurs propres associés sont $e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
b) La variété stable est $W_s = < e^2 >$.
Barème: 03+03
Exercice 3: 07 pts On considère deux armées A et B qui se livrent une bataille, décrite par le modèle suivant

$$(3) \quad \begin{cases} A'(t) = -\beta B(t) \\ B'(t) = -\alpha A(t) \\ A(0) = A_0 \geq 0, B(0) = B_0 \geq 0 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in R^+$$

a) Montrer que le système (3) admet une solution unique , définie pour tout $t \geq 0$.

Sol: Le chaps de vecteurs est de classe C^1, donc le problème de Cauchy admet une solution unique.

b) Sous quelle condition l'armée B perd la bataille ? i.e B devient nulle avant A.

Sol: B perd la bataille à l'instant T si $B(T) = 0$, et $A(T) > 0$.Remarquons que

$$Q(A, B) = \alpha A^2 - \beta B^2$$

est constante sur les trajectoires.Ainsi

$$Q(A(T), B(T)) = \alpha A(T)^2 > 0$$

Ceci implique la condition nécessaire pour que B perd la bataille.

$$Q(A_0, B_0) = \alpha A_0^2 - \beta B_0^2 = Q(A(T), B(T)) > 0$$

Barème:02+05